BG

BILDUNGSPLAN 2021

BERUFLICHES GYMNASIUM

Mathematik, erhöhtes Anforderungsniveau

GUTE **BILDUNG**
Beste Aussichten
Baden-Württemberg

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Impressum

Herausgeber	Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, Postfach 103442, 70029 Stuttgart
Bildungsplan-erstellung	Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung, Heilbronner Str. 314, 70469 Stuttgart (www.zsl.kultus-bw.de)
Internet	www.bildungsplaene-bw.de
Urheberrecht	Die fotomechanische oder anderweitig technisch mögliche Reproduktion des Satzes beziehungsweise der Satzordnung für kommerzielle Zwecke nur mit Genehmigung des Herausgebers
Technische Umsetzung	pirobase imperia GmbH, Von-der-Wettern-Str. 27, 51149 Köln
Titelkonzeption	Johannes-Gutenberg-Schule Stuttgart, Fachschule für Visuelle Kommunikation, www.jgs-stuttgart.de Entwurf: Anna Sophie Hofmann, Nora Linda Nann, Nina Pichler Betreuende Lehrer und PrePress-Finishing: Maurizio Di Dario, Roman Wagner

KULTUS UND UNTERRICHT
AMTSBLATT DES MINISTERIUMS FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG

Stuttgart, 23. Juli 2020

BILDUNGSPLAN FÜR DAS BERUFLICHE GYMNASIUM;
HIER:
BERUFLICHES GYMNASIUM DER SECHS- U. DREIJ. AUFBAUFORM

Vom 23. Juli 2020 44 – 6512.- 240/211

I. Für das Berufliche Gymnasium gilt der als Anlage beigefügte Bildungsplan.

II. Der Bildungsplan tritt
für die Eingangsklasse am 1. August 2021
für die Jahrgangsstufe 1 am 1. August 2022
für die Jahrgangsstufe 2 am 1. August 2023
in Kraft.

Im Zeitpunkt des jeweiligen Inkrafttretens treten die im Lehrplanheft 2/2014 veröffentlichten Lehrpläne in diesem Fach vom 29. Juli 2014 (Az. 45-6512-240/144) außer Kraft.

Vorbemerkungen

Fachbezogene Vorbemerkungen

1. Fachspezifischer Bildungsauftrag (Bildungswert des Faches)

Mathematische Anwendungen finden sich in unterschiedlichen Bereichen unserer Lebenswelt, sie bilden die Grundlage für viele gesellschaftliche Entscheidungen und wissenschaftliche Entwicklungen. Mathematik ist eine kulturelle Errungenschaft, die über Jahrtausende hinweg zur heutigen Fülle gewachsen ist. Eine Wissenschaft, die bereits in frühesten Kulturen Fragen über die Anwendbarkeit hinaus, nach Mustern und Verhältnissen gestellt hat, und mit verblüffenden, zum Teil der unmittelbaren Intuition zuwiderlaufenden Einsichten aufwarten konnte.

Aus diesem Mathematikverständnis leitet sich der grundsätzliche Beitrag des Mathematikunterrichts zu den allgemeinen Bildungszielen der gymnasialen Oberstufe sowie zur Kompetenzentwicklung bis zur allgemeinen Hochschulreife ab. Zusammenfassen lässt sich dieser Beitrag in den Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (vgl. Winter (1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik in der Mathematik Nr. 61):

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (Mathematik und Alltagserfahrungen),
- Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln als geistige Schöpfungen, als deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (innermathematisches Arbeiten),
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten).

2. Fachliche Aussagen zum Kompetenzerwerb, prozessbezogene Kompetenzen

Der Mathematikunterricht eröffnet jedem Lernenden auf der Grundlage dieses Bildungsplans einen Zugang zu den genannten Grunderfahrungen, um damit ihr bislang erworbenes Bild von Mathematik zu erweitern und Freude an ihrem eigenen mathematischen Potenzial zu entwickeln. Ein solcher Unterricht soll die Persönlichkeit der Schülerinnen und Schüler zur Entfaltung bringen. Dabei erleben die Lernenden in einer zunehmend eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten und Problemstellungen ihre Selbstwirksamkeit bei mathematischen Fragestellungen und werden „zunehmend fähig, ihr Lernen selbst zu steuern und zu verantworten.“ (vgl. Basismodell zur individuellen Förderung an beruflichen Schulen). Damit setzt der Mathematikunterricht den im Schulgesetz Baden-Württembergs verankerten Bestandteil des Erziehungs- und Bildungsauftrags zur individuellen Förderung um. Eine horizontale wie auch vertikale Vernetzung der mathematischen Inhalte ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, nachhaltige Grundvorstellungen aufzubauen. Das Verständnis mathematischer Begriffe und Ideen steht im Vordergrund und wird durch eine sprachsensible Gestaltung der Unterrichtsimpulse gefördert.

Durch eine fortwährende Vermittlung von konkret und abstrakt operationalem Denken anhand kognitiv aktivierender Unterrichtsgestaltungen (vgl. Fauth, Leuders (2018): Kognitive Aktivierung im Unterricht, Wirksamer Unterricht Band 2) etablieren die Lernenden folgende Kompetenzen: In Zusammenhängen denken, reale Vorgänge modellieren, Techniken des Problemlösens beherrschen sowie Ergebnisse darstellen und interpretieren. Ausgehend von einer pädagogischen Begleitung der Schülerinnen und Schüler eröffnet die Lehrperson den Lernenden Möglichkeiten zum individuellen Lernen. Vor dem Hintergrund der Tiefenstrukturen, kognitive Aktivierung, konstruktive Unterstützung und Klassenführung, (vgl. Trautwein, Sliwka, Dehmel (2018): Grundlagen für einen wirksamen Unterricht, Band 1, Landesinstitut für Schulentwicklung) finden die mathematischen Inhalte ihren Ausdruck durch folgende allgemeine mathematische Kompetenzen (vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012):

- K1: Mathematisch argumentieren,
- K2: Probleme mathematisch lösen,
- K3: Mathematisch modellieren,
- K4: Mathematische Darstellungen verwenden,
- K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen,
- K6: Mathematisch kommunizieren.

Die einzelnen Prozesskompetenzen sind nicht disjunkt voneinander zu verstehen, sondern überschneiden sich vielmehr. Die Lernenden nutzen bei der Auseinandersetzung mit Mathematik immer mehrere Kompetenzbereiche im Wechselspiel. Dabei nimmt die Problemlösekompetenz eine zentrale Stellung ein, weshalb sie explizit als eigenständige Bildungsplaneinheit in den Bildungsplan aufgenommen wurde. Durch Reflexion über Problemlösestrategien und Heuristiken bilden sich Fähigkeiten und Fertigkeiten aus, die auf andere Lebensbereiche übertragbar sind. Für die Realisierung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts bieten die folgenden Merkmale, wie sie von Blum und Biermann herausgearbeitet wurden, eine Orientierung zur konkreten Umsetzung des Bildungsplans (vgl. Biermann, Blum (2001), in Mathematik Lehren, Heft 108):

- Behandlung offener Aufgaben mit breitem Differenzierungspotenzial,
- Erarbeiten vielfältiger Lösungen, Vergleichen und Bewerten von Lösungen,
- Inner- und außermathematische Vernetzungen,
- Vorstellungsaktivierung, Modellieren, Argumentieren und Begründen,
- Durchgängig geistige Schüleraktivität,
- Methodenvariation im Rahmen einer klaren Unterrichtskultur mit vielen Schüler-Kooperationsphasen,
- Erkennbar beurteilungsfreie Arbeitsatmosphäre, wo Fehler Lernanlässe sind,
- Reflexion über das Vorgehen und über Mathematik.

3. Ergänzende fachliche Hinweise

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der Reduktion schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer Datenmengen,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten“ (Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

Die Einsatzmöglichkeiten von digitalen Mathematikwerkzeugen wie Computeralgebrasystemen, dynamischer Geometriesoftware und Tabellenkalkulationen orientieren sich zum einen an der oben beschriebenen Intention der Begegnung mit den Grunderfahrungen, zum anderen an den mathematischen Kompetenzen. Daraus lassen sich erste didaktische Konkretisierungen für den Mathematikunterricht mit digitalen Mathematikwerkzeugen ableiten:

- Erzeugen und Analysieren von Beispielen zur Diskussion geeigneter Lösungswege (K2),
- Entwickeln von mathematischen Modellen und deren Variation und Bewertung (K3),
- Verarbeiten von umfangreichen realen Datenmengen (K3, K5),
- Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen zur Unterstützung von Argumentation und Dokumentation individueller Überlegungen (K1, K4),
- Entdecken von mathematischen Mustern durch Interpretation von Rechenergebnissen (K5, K4),
- Fördern von eigenständigem Arbeiten durch Validieren eigener Berechnungen (K5, K1),
- Verbessern der Fachsprache mittels verschiedener Darstellungsmöglichkeiten (K5, K6).

Der Einsatz von digitalen Medien und Werkzeugen dient nicht als Ersatz, sondern als didaktisch fundierte Ergänzung zu anderen Formen des Lehrens und Lernens. In Verbindung mit der individuellen Förderung orientiert sich der Einsatz digitaler Medien bzw. Endgeräte an folgenden Gesichtspunkten (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2017): Individuelle Förderung mit Unterstützung von digitalen Endgeräten im Unterricht an beruflichen Schulen):

- Gestaltung des Unterrichts entlang der Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler,
- Individualisierte Unterstützung des Lernprozesses durch digitale Geräte und entsprechende Software im Unterricht,
- Nutzung von Blended-Learning-Konzepten zur individuellen Förderung,
- Gewinnung von Handlungssicherheit im Rahmen von Lehr-Lern-Arrangements für Schülerinnen und Schüler bzw. Lehrkräfte.

Damit fördert der Einsatz von digitalen Medien und Werkzeugen im Mathematikunterricht die Ausbildung von Kompetenzen, aber auch von Haltungen, wie sie oben ausgeführt wurden, und unterstützt die Lehrkräfte bei der Umsetzung des Bildungsplans bzw. des Erziehungsauftrags.

Die Schülerinnen und Schüler erwerben die genannten Kompetenzen anhand der mathematischen Inhalte des vorliegenden Bildungsplans. Die einzelnen Einheiten dieses Bildungsplans orientieren sich maßgeblich an den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für das Fach Mathematik vom 18.10.2012. Beim Unterricht in den beiden Jahrgangsstufen wird zwischen einem grundlegenden und einem erhöhten Anforderungsniveau entsprechend den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife differenziert.

Die Bildungsplaneinheiten Profilierung durch Matrizen (BPE 19 – 21) ergänzen mit besonderem Fokus auf die unterschiedlichen Richtungen des Beruflichen Gymnasiums die Inhalte der Bildungsstandards dahingehend, dass spezifisch mathematische Begriffe bereitgestellt werden. Fächerübergreifende Aufgabenstellungen verdeutlichen die weitreichende Bedeutung der Mathematik. Durch die Behandlung von Problemen aus der Berufs- und Arbeitswelt sowie durch Begegnungen mit Anwendungssituationen fördert der Mathematikunterricht die berufliche Orientierung der Schülerinnen und Schüler und bereitet gleichzeitig auf ein Hochschulstudium vor.

Hinweise zum Umgang mit dem Bildungsplan

Der Bildungsplan zeichnet sich durch eine Inhalts- und eine Kompetenzorientierung aus. In jeder Bildungsplaneinheit (BPE) werden in kursiver Schrift die übergeordneten Ziele beschrieben, die durch Zielformulierungen sowie Inhalts- und Hinweisspalte konkretisiert werden. In den Zielformulierungen werden die jeweiligen fachspezifischen Operatoren als Verben verwendet. Operatoren sind handlungsinitiierende Verben, die signalisieren, welche Tätigkeiten beim Bearbeiten von Aufgaben erwartet werden. Die für das jeweilige Fach relevanten Operatoren sowie deren fachspezifische Bedeutung sind jedem Bildungsplan im Anhang beigefügt. Durch die kompetenzorientierte Zielformulierung mittels dieser Operatoren wird das Anforderungsniveau bezüglich der Inhalte und der zu erwerbenden Kompetenzen definiert. Die formulierten Ziele und Inhalte sind verbindlich und damit prüfungsrelevant. Sie stellen die Regelanforderungen im jeweiligen Fach dar. Die Inhalte der Hinweisspalte sind unverbindliche Ergänzungen zur Inhaltsspalte und umfassen Beispiele, didaktische Hinweise und Querverweise auf andere Fächer bzw. BPE.

Der VIP-Bereich des Bildungsplans umfasst die Vertiefung, individualisiertes Lernen sowie Projektunterricht. Im Rahmen der hier zur Verfügung stehenden Stunden sollen die Schülerinnen und Schüler bestmöglich unterstützt und bei der Weiterentwicklung ihrer personalen und fachlichen Kompetenzen gefördert werden. Die Fachlehrerinnen und Fachlehrer nutzen diese Unterrichtszeit nach eigenen Schwerpunktsetzungen auf Basis der fächerspezifischen Besonderheiten und nach den Lernvoraussetzungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler.

Der Teil „Zeit für Leistungsfeststellung" des Bildungsplans berücksichtigt die Zeit, die zur Vorbereitung, Durchführung und Nachbereitung von Leistungsfeststellungen zur Verfügung steht. Dies kann auch die notwendige Zeit für die gleichwertige Feststellung von Schülerleistungen (GFS), Nachbesprechung zu Leistungsfeststellungen sowie Feedback-Gespräche umfassen.

Bildungsplanübersicht

Schuljahr	**Bildungsplaneinheiten**	**Zeitricht-wert**	**Gesamt-stunden**
Eingangsklasse	Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht (VIP)	40	
	1 | Vertiefung der Mathematik aus Sekundarstufe I	15	
	2 | Potenzfunktionen und zugehörige Gleichungen	10	
	3 | Polynomfunktionen und zugehörige Gleichungen	20	
	4 | Exponentialfunktionen und zugehörige Gleichungen	20	
	5 | Modellieren mit Funktionen und Problemlösen	10	
	6 | Änderungsrate und grafisches Differenzieren	10	
	7 | Vektorielle Geometrie – Grundlagen	15	140
	Zeit für Leistungsfeststellung		20
			160
Jahrgangsstufen 1 und 2	Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht (VIP)	90	
	8 | Problemlösen	10	
	9 | Modellieren	10	
	10 | Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen	15	
	11 | Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen	5	
	12 | Differenzialrechnung	25	
	13 | Integralrechnung	15	
	14 | Aufstellen von Funktionstermen	5	
	15 | Optimieren	15	
	16 | Vektorielle Geometrie – Vertiefung	25	
	17 | Stochastik	45	
	18 | Lineare Gleichungssysteme	10	
	19* | WG: Beschreibung von Produktionsprozessen durch Matrizen	25	
	20* | TG: Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen	25	
	21* | AG, BTG, EG, SGG: Beschreibung von Austausch- und Populationsprozessen durch Matrizen	25	
	22 | Wahlgebiete	20	315

Schuljahr	Bildungsplaneinheiten	Zeitricht-wert	Gesamt-stunden
	Zeit für Leistungsfeststellung		45
			360

* Entsprechend der Richtung des Beruflichen Gymnasiums ist eine BPE zu unterrichten.

Eingangsklasse

Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht (VIP)		**40**
Vertiefung	**Individualisiertes Lernen**	**Projektunterricht**
z. B. Übungen Anwendungen Wiederholungen	z. B. Selbstorganisiertes Lernen Lernvereinbarungen Binnendifferenzierung	z. B. Daten erheben, auswerten und interpretieren; Modellierung, Regression, Interpolation Biografien berühmter Mathematiker (Euler, Bernoulli, Gauß usw.) Erstellen von Erklärvideos

Die Themenauswahl des Projektunterrichts hat aus den nachfolgenden Bildungsplaneinheiten unter Beachtung Fächer verbindender Aspekte zu erfolgen.

BPE 1	**Vertiefung der Mathematik aus Sekundarstufe I**	**15**

Die erste Bildungsplaneinheit umfasst Themen, die die Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I bereits kennengelernt haben können, die jedoch im Verlauf der Eingangsklasse in unterschiedlichen Aspekten vertieft und erweitert werden. Dabei ist nicht nur an eine inhaltliche Vertiefung gedacht; vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler anhand bekannter Themen an das Arbeiten in der Sekundarstufe II herangeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Grundvorstellung mathematischer Begriffe, die es ihnen erlaubt, Inhalte zu verknüpfen und mathematische Aussagen selbstständig abzuleiten. Sie lernen an einzelnen Beispielen den Beweis als wesentliches Element der Mathematik kennen und erfahren so ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte.

BPE 1.1 **Die Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung auf reelle Zahlen. Sie geben Teilmengen der reellen Zahlen mithilfe von Mengensymbolen, durch Ungleichungen sowie in Intervallschreibweise an.**

Zahlenmengen: N, Z, Q, R

Teilmengen der reellen Zahlen	z. B. $x \in R_+^*$ bzw. $x > 0$ bzw. $x \in]0; \infty[$
Intervalle	z. B. Einführung im Zusammenhang mit Definitions- und Wertebereichen von Funktionen oder bei Ungleichungen

BPE 1.2 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Funktionsbegriff an Beispielen aus dem Alltag. Sie entscheiden, ob eine gegebene Zuordnung eindeutig oder nicht eindeutig ist. Darüber hinaus erläutern sie die Begriffe Definitionsbereich, Definitionslücke und Wertebereich und ermitteln den Definitions- und den Wertebereich einer grafisch, algebraisch oder verbal gegebenen Funktion, auch im Kontext einer Anwendungssituation.**

Zuordnungen: eindeutig/nicht eindeutig

Funktionsbegriff	Relationsbegriff
Definitions- und Wertebereich	z. B. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ mit $D_f = [0,5; \infty[$ und $W_f = R_+$ Geschwindigkeit – Bremsweg mit $D = R_+$ und $W = R_+$

	Stückzahlen – Produktionskosten mit $D = N$ und $W = R_+$
Definitionslücke	z. B. $g(x) = \frac{1}{x}$; $D_g = R\backslash\{0\}$; $W_g = R\backslash\{0\}$

BPE 1.3 **Die Schülerinnen und Schüler geben Funktionen durch Tabellen, Gleichungen, Funktionsgraphen oder Texte an, wechseln zwischen den Darstellungsformen und bewerten diese im jeweiligen Kontext. Sie identifizieren abhängige und unabhängige Variablen, beschreiben deren Zusammenhang und nennen charakteristische Wertepaare. Sie erläutern Zusammenhänge zwischen den Funktionsdarstellungen unter Verwendung von Fachsprache und mathematischer Symbolschreibweise.**

Darstellung von Funktionen	
– tabellarisch	z. B. Messwerte: Gewicht, Wasserstand
– algebraisch	z. B. $f(x) = 2x;\ f(x) = x^2 + 1;\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ $f(x) = \sqrt{2x+1}$; bzw. $f: x \mapsto \sqrt{2x+1}$ z. B. verschiedene Gleichungsformen derselben Funktion wie $y = mx + b;\ y = m\left(x + \frac{b}{m}\right);$ $rx + sy + t = 0$
– grafisch	z. B. Gefäßformen – Füllhöhe z. B. die Graphen zu $f(x) = 2x;\ f(x) = x^2;$ $f(x) = 2^x;\ f(x) = \sin(2x);\ f(x) = \frac{2}{x}$
– verbal	z. B. Jedem Kreisradius wird die Kreisfläche zugeordnet. Jedem Schüler wird sein Alter zugeordnet.
Schreib- und Sprechweisen	z. B. $f(2) = 4$ Der Punkt $P(2\|4)$ liegt auf dem Funktionsgraphen von f $g(x) < 0$ für $x \in D_g$. Der Graph von g verläuft unterhalb der x-Achse $f(3) = g(3) = -7$. Die Funktionsgraphen von f und g schneiden sich im Schnittpunkt $S(3\|-7)$.

BPE 1.4 **Die Schülerinnen und Schüler deuten Geraden als Graphen linearer Funktionen. Sie geben die Gleichungen besonderer Geraden an und begründen, dass eine Parallele zur y-Achse nicht Graph einer Funktion ist. Sie berechnen den Steigungswinkel einer Geraden und deuten ihn grafisch. Sie interpretieren lineare Ungleichungen geometrisch und ermitteln die Lösungsmengen mit Äquivalenzumformungen. Ebenso untersuchen die Schülerinnen und Schüler die Lagebeziehung zweier Geraden anhand ihrer Gleichungen und der Orthogonalitätsbedingung.**

Geraden als Graph linearer Funktionen

Besondere Geraden

	– Parallelen zu den Koordinatenachsen	z. B. $x = 2$; $y = 2$
	– erste und zweite Winkelhalbierende	
	Steigungswinkel einer Geraden, $m = tan(\alpha)$	
	Lineare Ungleichungen	
	Lagebeziehung zweier Geraden	
	Beweis der Orthogonalitätsbedingung: anschaulich und formal, $m_g \cdot m_h = -1$	

BPE 1.5	**Die Schülerinnen und Schüler deuten Potenzen mit rationalen Exponenten als Wurzel- oder Bruchausdrücke und wechseln zwischen den Darstellungsformen. Sie erläutern an Beispielen, dass die Rechengesetze für das Multiplizieren, das Dividieren und das Potenzieren von Potenzen auch für rationale Exponenten gelten und wenden diese Rechengesetze an.**	
	Potenzen mit rationalen Exponenten	$a^0 = 1;\ a^{-r} = \frac{1}{a^r};\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ z. B. vor den Potenzfunktionen oder vor den Exponentialfunktionen
	Potenzgesetze	

BPE 2	**Potenzfunktionen und zugehörige Gleichungen**	**10**

Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihre Kenntnisse über lineare und quadratische Funktionen auf Potenzfunktionen mit ganzzahligen und gebrochenen Hochzahlen. Sie entdecken die charakteristischen Eigenschaften der Graphen dieser Funktionen und setzen diese in Beziehung zum Funktionsterm. Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihre Kenntnisse über quadratische Funktionen, führen Transformationen ausgehend von Parabeln auch an Graphen anderer Potenzfunktionen durch und stellen diese in Zusammenhang mit dem Funktionsterm.

BPE 2.1	**Die Schülerinnen und Schüler skizzieren Graphen von Potenzfunktionen. Sie ermitteln die Eigenschaften von Potenzfunktionen ausgehend von den Funktionstermen und Funktionsgraphen und erläutern den Stetigkeitsbegriff anschaulich anhand der Graphen von Potenzfunktionen.**	
	Funktionstypen	z. B. Sektgläser, Schwingungsdauer Pendel, Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt A: $y = \frac{A}{x}$
	– $f(x) = x^n$ mit $n \in N^*$	z. B. $f(x) = x^5$
	– $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in N^*$	z. B. $f(x) = x^{-2}$
	– $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in N^*$	z. B. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
	Funktionsgraphen	
	– globales Verhalten:für $x \longrightarrow \pm\infty$ gilt $f(x) \longrightarrow \ldots$	z. B. in Abhängigkeit von a: $f(x) = a \cdot x^2$ waagerechte Asymptote: $f(x) = \frac{1}{x} + d$
	– Verhalten bei Annäherung an die Definitionslücke	senkrechte Asymptote anschauliche Einführung des Stetigkeitsbegriffs

- Symmetrie:zum Ursprung
  $f(-x) = -f(x)$,zur y-Achse
  $f(-x) = f(x)$
- Definitions- und Wertebereich
- Stetigkeit — Zeichnen des Graphen ist ohne Absetzen des Stifts möglich

---

BPE 2.2 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben anhand von Funktionstermen und Funktionsgraphen wie ein Graph mittels Transformationen – unter Berücksichtigung der Reihenfolge – aus dem Graphen der unten aufgeführten Funktionen entsteht. Sie geben zu einer verbal oder grafisch gegebenen Transformation den zugehörigen Funktionsterm an.**

Funktionen

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x}$

Transformationen

- Spiegelung an der x-Achse
- Streckung in y-Richtung
- Verschiebung in y-Richtung
- Verschiebung in x-Richtung — Veränderung der Symmetrieachse durch Verschiebung der Parabel

---

BPE 2.3 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Lösungen einfacher Potenzgleichungen algebraisch. Sie begründen die Notwendigkeit einer Probe beim Lösen einer Wurzelgleichung.**

Potenzgleichungen — z. B.
$x^3 = -5;\ x^4 = 6;\ x^{-2} = 8;\ < br / >$
$x^{-2} = -8;\ x^{\frac{1}{2}} = 4;\ \sqrt{x-1} = -1$

Umkehrung der Rechenoperationen — bei Wurzelgleichungen mit Probe

---

BPE 3 **Polynomfunktionen und zugehörige Gleichungen** **20**

Die Schülerinnen und Schüler lernen Polynomfunktionen und deren Graphen kennen. Sie entdecken die charakteristischen Eigenschaften der Graphen dieser Funktionen und erweitern ihre mathematische Ausdrucksfähigkeit, indem sie Zusammenhänge zwischen Funktionstermen und Funktionsgraphen erläutern. In einfachen Fällen lösen die Schülerinnen und Schüler Polynomgleichungen und quadratische Ungleichungen und verknüpfen dabei formales Rechnen mit der Veranschaulichung durch entsprechende Funktionsgraphen. Die Schülerinnen und Schüler nutzen Funktionen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge, z. B. aus Wirtschaft und Technik sowie aus Physik, Chemie und Biologie.

BPE 3.1 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Polynomfunktionen mithilfe unterschiedlicher Darstellungsformen und begründen die Wahl der Form im mathematischen bzw. im anwendungsorientierten Kontext.**

Polynomfunktion n-ten Grades
Darstellungsformen

- allgemeine Form — z. B. $f(x) = x^5 - 2x^3 + 4x$

	– Produktform	z. B. $f(x) = 3(x-2)(x+1)^3$
	– Scheitelform der Parabel	z. B. $f(x) = 0,5(x-3)^2 + 5$

BPE 3.2	**Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Eigenschaften von Polynomfunktionen ausgehend von den Funktionstermen und skizzieren die Funktionsgraphen. Sie geben die Eigenschaften auch mit mathematischer Symbolsprache an. Darüber hinaus zeichnen die Schülerinnen und Schüler einen Funktionsgraphen mithilfe einer Wertetabelle.**	
	Funktionsgraph	
	– globales Verhalten: für $x \longrightarrow \pm\infty$ gilt $f(x) \longrightarrow \ldots$	
	– Symmetrie:zum Ursprung $f(-x) = -f(x)$zur y-Achse $f(-x) = f(x)$	nur gerade bzw. ungerade Exponenten z. B. $f(x) = 2x^4 - 3x^2$; $f(x) = x^3 + tx^2 + x$
	– gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen	z. B. $f(x) = -2x^3 + 4x$ $f(x) = 3(x-t)(x+1)^3$ Vielfachheit der Nullstellen in Abhängigkeit von t Fundamentalsatz der Algebra

BPE 3.3	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus grafisch, tabellarisch oder verbal gegebenen Funktionseigenschaften einen geeigneten Ansatz und Bedingungen, die zur Ermittlung des Funktionsterms dienen. Ebenso ermitteln sie in geeigneten Fällen den Funktionsterm.**	
	Aufstellen von Funktionstermen aus	
	– Funktionsgraph – Text – Wertetabelle	z. B. $f(x) = ax^4 + bx^2 + 2$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)^2$

BPE 3.4	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösung von Polynomgleichungen algebraisch und begründen die Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie. Sie deuten die berechneten Lösungen grafisch als Nullstellen einer Funktion beziehungsweise als Schnittstellen zweier Funktionen und bestimmen die Lösung quadratischer Ungleichungen mithilfe des Funktionsgraphen.**	
	Lösen von Gleichungen	
	– Umkehrung der Rechenoperationen	z. B. $x^5 = -2$
	– Faktorisierung durch Ausklammern und Satz vom Nullprodukt	z. B. $0 = 3x^4 - tx^2$
	– Lösungsformeln für quadratische Gleichungen	
	– Substitution	
	– numerische Lösung	Wertetabelle
	Quadratische Ungleichungen	quadratische Gleichung mit anschließender grafischer Interpretation

BPE 3.5	**Die Schülerinnen und Schüler deuten Polynomfunktionen und ihre Eigenschaften in einem gegebenen Sachzusammenhang, zum Beispiel aus der Wirtschaft, Technik oder Naturwissenschaft. Sie ermitteln Polynomfunktionen zur Darstellung einfacher Optimierungsprobleme und interpretieren Wertetabellen, Funktionsgraphen und Funktionsterme zur Lösung dieser Probleme.**	
	Polynomfunktionen in Anwendungen	z. B. Brückenbogen, Wurfparabel, Kostenfunktion
	– aus dem jeweiligen Profilbereich	
	Optimierungsprobleme	z. B. optimale Fläche, optimale Schachtel mit Funktionsgraph, Gewinnmaximum
	– Zielfunktion – Definitions- und Wertebereich – Maximum/Minimum	

BPE 4	**Exponentialfunktionen und zugehörige Gleichungen**	**20**

Die Schülerinnen und Schüler lernen die Exponentialfunktionen zur Beschreibung von exponentiellen Wachstums- bzw. Zerfallsprozessen kennen. Sie entdecken die charakteristischen Eigenschaften der Graphen dieser Funktionen und setzen diese in Beziehung zum Funktionsterm. Darüber hinaus transformieren sie diese Funktionsgraphen und beschreiben die Transformationen anhand des Funktionsterms. Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Funktionsterme aus vorgegebenen Eigenschaften und lernen den Logarithmus als Hilfsmittel zur Lösung von Exponentialgleichungen kennen und entdecken die Zahl e als besondere Basis.

BPE 4.1	**Die Schülerinnen und Schüler identifizieren eine Exponentialfunktion anhand des Funktionsterms und des Funktionsgraphen. Sie geben einen Näherungswert der Eulerschen Zahl e an, nennen die besondere Bedeutung der Basis e bei Exponentialfunktionen und wechseln die Darstellung zwischen einer beliebigen Basis und der Basis e.**	
	Exponentialfunktionen	
	– zur Basis q mit $q > 0$ und $q \neq 1$ $f(x) = q^x$	
	– zur Basis e $f(x) = e^x$	z. B. $f(x) = 2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$
	Eulersche Zahl e	z. B. stetige Verzinsung z. B. im Kontext der Differenzialrechnung

BPE 4.2	**Die Schülerinnen und Schüler beschreiben anhand von Funktionstermen oder Funktionsgraphen, wie der Graph einer Exponentialfunktion mittels Transformationen – unter Berücksichtigung der Reihenfolge – aus dem Funktionsgraphen $y = e^x$ entsteht. Sie geben zu einer verbal oder grafisch gegebenen Transformation den zugehörigen Funktionsterm an.**	
	Transformationen	
	– Spiegelung an der y-Achse – Spiegelung an der x-Achse – Streckung in y-Richtung	
	– Streckung in x-Richtung	z. B. Wechsel der Basis $f(x) = 2^x = e^{\ln(2) \cdot x}$

– Verschiebung in y-Richtung	
– Verschiebung in x-Richtung	Besonderheit: $q^{x+2} = q^2 \cdot q^x$
Reihenfolge der Transformationen	z. B. $f(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} + 5$ $f(x) = 5 \cdot \left(1 - e^{-2x}\right)$

BPE 4.3 **Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Eigenschaften von Exponentialfunktionen ausgehend von den Funktionstermen und skizzieren die Funktionsgraphen. Sie geben die Eigenschaften auch mit mathematischer Symbolsprache an und zeichnen einen Funktionsgraphen mithilfe einer Wertetabelle.**

Graph der Funktion	z. B. $f(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} + t$
– globales Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$: asymptotisches Verhalten	z. B. für $x \longrightarrow \infty$ gilt $f(x) \longrightarrow t$
– globales Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$: Gleichung der Asymptote	z. B. $y = t$
– globales Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$: $f(x) \longrightarrow \pm\infty$	z. B. für $x \longrightarrow -\infty$ gilt $f(x) \longrightarrow -\infty$
– gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen	
– steigender bzw. fallender Verlauf	Einfluss der Parameter auf den Verlauf Wachstum, Zerfall, Monotonie

BPE 4.4 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus grafisch, tabellarisch oder verbal gegebenen Funktionseigenschaften einen geeigneten Ansatz und Bedingungen, die zur Ermittlung eines Funktionsterms dienen. Darüber hinaus ermitteln sie in geeigneten Fällen einen Funktionsterm.**

Aufstellen von Funktionstermen aus	LGS mit zwei Unbekannten und nichtlineare Gleichungssysteme $f(x) = ae^{bx} + d$ $f(x) = aq^x + d$
– Funktionsgraph – Text – Wertetabelle	

BPE 4.5 **Die Schülerinnen und Schüler deuten den Logarithmus einer Zahl als Lösung einer Exponentialgleichung. Exponentialgleichungen lösen sie algebraisch und begründen die Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie. Die berechneten Lösungen interpretieren die Schülerinnen und Schüler grafisch als Nullstellen einer Funktion beziehungsweise als Schnittstellen zweier Funktionen.**

Logarithmus	$q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q(y)$ insbesondere $q = 2$ und $q = 10$ sowie $q = e$ Vorkommen in Naturwissenschaft und Technik
Lösen von Exponentialgleichungen	
– Umkehrung der Rechenoperationen	z. B. $4 \cdot 0,5^x = 100$ $e^x = 3$

	$2e^{x} - 4 = 8$ $2e^{-0,5x} = 6$ $e^{x} = -5$
– Faktorisierung durch Ausklammern und Satz vom Nullprodukt	z. B. $2e^{x} = e^{2x}$
– Substitution	z. B. $2e^{x} - 3 = e^{2x}$

BPE 4.6 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Unterschied zwischen linearem und exponentiellem Wachstum. Sie beschreiben exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse mithilfe von Exponentialfunktionen und deuten die Parameter des Funktionsterms $f(x) = ae^{bx} + d$ oder $f(x) = aq^{x} + d$ im Sachzusammenhang.**

Lineares Wachstum (Zu- und Abnahme)	z. B. Abbrennen einer Kerze
Exponentielles Wachstum	z. B. Bakterienwachstum, Kapitalentwicklung, radioaktiver Zerfall, Entladung eines Kondensators
Beschränktes Wachstum	z. B. Aufladen eines Kondensators, Lösen eines Stoffes, Abkühlungsprozess

BPE 5 Modellieren mit Funktionen und Problemlösen 10

Viele Aspekte realer Vorgänge können durch eine Mathematisierung beschrieben und untersucht werden. Beim Bearbeiten realitätsbezogener Probleme (Modellieren) wenden Schülerinnen und Schüler Vorgehensweisen des Problemlösens an und lernen zusätzlich die Besonderheiten, die sich durch den Realitätsbezug ergeben: Mathematische Modelle beschreiben vereinfachende Ausschnitte der Realität, Größen können nur näherungsweise bekannt sein und Ergebnisse haben eine begrenzte Gültigkeit und Reichweite. Beim Modellieren erkennen die Schülerinnen und Schüler mathematische Strukturen in der Welt und erleben Mathematik als eine Sprache, um diese zu beschreiben. Diese Bildungsplaneinheit soll integrativ an einfachen Beispielen unterrichtet werden.

BPE 5.1 **Die Schülerinnen und Schüler nutzen erste Prinzipien beim Modellieren und Problemlösen. Sie erfassen eine mathematische Fragestellung, begründen die Wahl eines mathematischen Modells im Sachzusammenhang, verwenden das Modell zur Lösung des Problems und interpretieren ihre Ergebnisse im Kontext der Fragestellung. Sie reflektieren ihren Lösungsprozess.**

Analyse und Verstehen eines Sachzusammenhangs (von der Realsituation zum realen Modell)	z. B. in eigenen Worten beschreiben, Informationen entnehmen oder beschaffen, Gegebenes und Gesuchtes identifizieren, Unbekanntes schätzen oder überschlagen, Situation vereinfachen, Fragen oder Vermutungen aufstellen
Auswahl und Anwenden eines mathematischen Modells, auch Regression mit digitalen Hilfsmitteln (vom realen Modell zum mathematischen Modell, innermathematische Lösung)	z. B. relevante Größen (u. a. Gegebenes und Gesuchtes) und ihre Beziehungen identifizieren, Modelle aus Algebra oder Analysis auswählen, Passung und Genauigkeit eines Modells beurteilen, mathematische Werkzeuge und Hilfs-

	mittel nutzen, bei mathematischen Lösungsschritten Strategien anwenden
Interpretation, Überprüfung und Analyse von Lösungsansatz (Modell), Lösungsweg und Ergebnis	z. B. die eigenen Lösungen im Sachzusammenhang interpretieren und validieren, Fehler analysieren und konstruktiv nutzen, Gültigkeit und Reichweite des Modells und der Ergebnisse bewerten, Überlegungen zur Verbesserung der Modellierung anstellen

BPE 6 **Änderungsrate und grafisches Differenzieren** **10**

Die Bildungsplaneinheit dient der vorbereitenden Begriffsbildung für die Differenzialrechnung in den Jahrgangsstufen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln handlungsorientiert eine grundsätzliche Vorstellung der Begriffe momentane und durchschnittliche Änderungsrate. Sie erweitern ihre Modellierungs- und Problemlösekompetenz, indem sie Realsituationen mathematisch durch den Begriff der Änderungsrate aus einem weiteren Blickwinkel untersuchen und beschreiben können. Abschließend lernen die Schülerinnen und Schüler erste Zusammenhänge der Graphen von Funktion und Steigung kennen und formulieren davon ausgehend erste Hypothesen über den algebraischen Zusammenhang.

BPE 6.1 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern in verschiedenen Anwendungssituationen den Unterschied zwischen momentaner und durchschnittlicher Änderungsrate und deuten grafisch oder rechnerisch ermittelte Änderungsraten im Anwendungskontext.**

Weg – Zeit – Geschwindigkeit Kosten – Produktionsmenge – Grenzkosten	
Wachstum	z. B. Bevölkerungswachstum, Bakterienwachstum, Pflanzenwachstum, Flüssigkeitsabkühlung Titration (pH-Wert/Konzentration), Abnahme der Lichtintensität in verschiedenen Medien, C14-Zerfall

BPE 6.2 **Die Schülerinnen und Schüler deuten die durchschnittliche Änderungsrate als Steigung der Sekante und bestimmen diese algebraisch und grafisch aus einem Funktionsgraphen, einem Funktionsterm oder einer Wertetabelle. Die Schülerinnen und Schüler bestimmen grafisch die momentane Änderungsrate als Steigung der Tangente.**

Durchschnittliche Änderungsrate	
– Sekantensteigung $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Momentane Änderungsrate an einem Punkt	
– Tangentensteigung grafisch	

BPE 6.3	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen grafisch Werte der Tangentensteigung, zeichnen davon ausgehend den Graphen und deuten diesen als Graphen der Ableitungsfunktion. Sie beschreiben Zusammenhänge zwischen den beiden Funktionsgraphen und entwickeln erste Hypothesen über einen möglichen algebraischen Zusammenhang.**	
	Ableitungsfunktion	
	– Wertetabelle der Steigungen – Graph der Ableitungsfunktion	Hypothese über den Funktionsterm der Ableitungsfunktion Hypothese über erste Ableitungsregeln

BPE 7	**Vektorielle Geometrie – Grundlagen**	**15**

Die Schülerinnen und Schüler lernen Vektoren als geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung geometrischer Objekte in der Ebene und im Raum kennen. Sie erweitern ihr räumliches Vorstellungsvermögen und machen sich mit der vektoriellen Schreibweise vertraut. Sie nutzen die Vektorrechnung als effektives Werkzeug zur analytischen Behandlung geometrischer Fragestellungen und stellen fachübergreifende Verbindungen her.

BPE 7.1	**Die Schülerinnen und Schüler deuten Vektoren als Pfeilklassen und interpretieren sie geometrisch als Verschiebung. Sie zeichnen geometrische Objekte im dreidimensionalen Koordinatensystem und nutzen das Koordinatensystem, um geometrische Sachverhalte zu beschreiben.**	
	Vektorbegriff	Pfeilklasse, Bewegung
	Vektoren	zweidimensional, dreidimensional
	– Gegenvektor – Nullvektor	
	Koordinatensystem im R^3	
	Standarddarstellung	x_1-Achse 135°, Verkürzungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$
	Koordinatenebenen	
	Punkte und Vektoren	Figuren, Körper
	– Ortsvektor – Verbindungsvektor zweier Punkte	
	Besondere Lage von Punkten	
	Senkrechte Projektion von Punkten auf Koordinatenebenen	
	Spiegelung von Punkten an Koordinatenebenen	

BPE 7.2	**Die Schülerinnen und Schüler verwenden elementare Rechenoperationen für Vektoren und deuten sie geometrisch. Sie berechnen den Betrag eines Vektors und interpretieren ihn als Länge und verwenden Vektoren zur Bestimmung von Teilpunkten einer Strecke.**	
	Rechenoperationen mit Vektoren	
	– Addition von Vektoren	z. B. Kräfteaddition, Wege, Preisvektor
	– Multiplikation mit einem Skalar	Kollinearität, Parallelität
	Betrag eines Vektors	Einheitsvektor

	– Abstand zweier Punkte – Länge einer Strecke	
	Teilung von Strecken	Mittelpunkt, P teilt die Strecke AB im Verhältnis 2:3

BPE 7.3	**Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Bedeutung des Skalarprodukts in der Geometrie. Damit bestimmen sie Winkel zwischen zwei Vektoren und untersuchen geometrische Objekte in Ebene und Raum.**

Skalarprodukt	z. B. physikalische Arbeit, Bestellvektor · Preisvektor = Rechnungsbetrag
Orthogonalität von Vektoren Winkel zwischen zwei Vektoren	
Anwendung bei Figuren	z. B. Nachweis Rechteck, gleichschenkliges Dreieck; Ergänzung zur Raute, Berechnung von Innenwinkeln und einfachen Flächen
– Dreieck	
– Vierecke	Rechteck, Quadrat, Parallelogramm, Raute, Trapez, Drachen

Jahrgangsstufen 1 und 2

Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht (VIP)		**90**
Vertiefung	**Individualisiertes Lernen**	**Projektunterricht**
z. B. Übungen Anwendungen Wiederholungen	z. B. Selbstorganisiertes Lernen Lernvereinbarungen Binnendifferenzierung	z. B. eine statistische Erhebung planen, durchführen und auswerten außerschulische Lernorte aufsuchen, bspw. Hochschulen oder Science Center Mathematik in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler: Mathematik und Sport, Mathematik und Kunst, Mathematik und Musik usw. Erstellen von mathematischen Stadtrallyes

Die Themenauswahl des Projektunterrichts hat aus den nachfolgenden Bildungsplaneinheiten unter Beachtung Fächer verbindender Aspekte zu erfolgen.

BPE 8	**Problemlösen**	**10**

Bei der Behandlung neuer und unbekannter Fragestellungen lernen Schülerinnen und Schüler Problemlösestrategien kennen und wenden diese an. Dies erfolgt integrativ, über alle inhaltlichen Themenbereiche (Bildungsplaneinheiten) hinweg, sodass die Schülerinnen und Schüler sukzessive mit den Methoden mathematischen Problemlösens vertraut werden. Dazu werden Lerngelegenheiten mit offenen Aufgaben (Problemaufgaben) geschaffen, in denen die Schülerinnen und Schüler eigenständig einen Lösungsplan entwickeln und umsetzen. Sie verwenden dabei unterschiedliche Hilfsmittel und Problemlösestrategien. Sie reflektieren und diskutieren ihr Vorgehen und dokumentieren ihre Gedanken. Dadurch erhalten sie einen Einblick in das Wesen der Mathematik.

BPE 8.1	**Die Schülerinnen und Schüler nutzen ein Problemlöseschema [Gerüst], um den Problemlöseprozess zu planen und durchzuführen. Sie interpretieren Probleme und lösen sie planvoll und systematisch. Sie wählen eigenständig geeignete Strategien zur Problemlösung aus und wenden diese an. Sie reflektieren Lösungswege und Lösungen.**	
	Analyse und Verstehen des Problems	z. B. in eigenen Worten beschreiben, Informationen entnehmen, Gegebenes und Gesuchtes identifizieren, Darstellungen verwenden (u.a. Skizzen, Tabellen nutzen), Fragen oder Vermutungen aufstellen
	Auswahl und Anwendung von Strategie	z. B. Beispiele generieren, systematisch probieren, Strukturen und Muster beschreiben, zerlegen und ergänzen, Analogien nutzen, auf Bekanntes zurückführen, vorwärts und rückwärts arbeiten, Sonderfälle analysieren, mathematische Werkzeuge nutzen
	Überprüfung und Analyse von Lösung und Lösungsweg	z. B. die eigene Lösung reflektieren, Fehler analysieren und konstruktiv nutzen, verschiedene Lösungswege

		vergleichen, verallgemeinern und weiterführende Fragen formulieren

BPE 9 **Modellieren** **10**

Viele Aspekte realer Vorgänge können durch eine Mathematisierung beschrieben und untersucht werden. Beim Bearbeiten realitätsbezogener Probleme (Modellieren) wenden Schülerinnen und Schüler Vorgehensweisen des Problemlösens an (s. BPE 8.1) und lernen zusätzlich die Besonderheiten, die sich durch den Realitätsbezug ergeben: Mathematische Modelle beschreiben vereinfachende Ausschnitte der Realität, Größen können nur näherungsweise bekannt sein und Ergebnisse haben eine begrenzte Gültigkeit und Reichweite. Beim Modellieren erkennen die Schülerinnen und Schüler mathematische Strukturen in der Welt und erleben Mathematik als eine Sprache, um diese zu beschreiben. Die Idee des Modellierens wird bei verschiedenen Bildungsplaneinheiten immer wieder aufgegriffen.

BPE 9.1 **Die Schülerinnen und Schüler nutzen die einzelnen Phasen des Modellierungskreislaufs beim mathematischen Untersuchen von Sachzusammenhängen. Sie erfassen einen Sachzusammenhang, begründen die Wahl eines mathematischen Modells, verwenden das Modell und den Lösungsansatz und interpretieren ihre Ergebnisse im Kontext der Anwendung. Die Qualität der Problemlösung reflektieren sie mit Blick auf die Güte des Modells.**

Analyse und Verstehen eines Sachzusammenhangs (von der Realsituation zum realen Modell)	z. B. in eigenen Worten beschreiben, Informationen entnehmen oder beschaffen, Gegebenes und Gesuchtes identifizieren, Unbekanntes schätzen oder überschlagen, Situation vereinfachen, Fragen oder Vermutungen aufstellen
Auswahl und Anwenden eines mathematischen Modells, auch Regression mit digitalen Werkzeugen (vom realen Modell zum mathematischen Modell, innermathematische Lösung)	z. B. relevante Größen (u.a. Gegebenes und Gesuchtes) und ihre Beziehungen identifizieren, Modelle aus (analytischer) Geometrie, Stochastik, Algebra oder Analysis auswählen, Passung und Genauigkeit eines Modells beurteilen, mathematische Werkzeuge und Hilfsmittel nutzen, bei mathematischen Lösungsschritten Strategien anwenden (s. BPE 8.1)
Interpretation, Überprüfung und Analyse von Lösungsansatz (Modell), Lösungsweg und Ergebnis	z. B. die eigenen Lösungen im Sachzusammenhang interpretieren und validieren, Fehler analysieren und konstruktiv nutzen, Gültigkeit und Reichweite des Modells und der Ergebnisse bewerten, Überlegungen zur Verbesserung der Modellierung anstellen

BPE 10 **Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen** **15**

Die Schülerinnen und Schüler definieren den Sinus und den Kosinus eines Winkels am Einheitskreis und erweitern damit ihre Kenntnisse der Trigonometrie. Sie entdecken die trigonometrischen Funktionen zur Mathematisierung periodischer Vorgänge und lernen die Eigenschaften der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion kennen. Darüber hinaus übertragen die Schülerinnen und Schüler bekannte Lösungsstrategien auf trigonometrische Gleichungen.

BPE 10.1	**Die Schülerinnen und Schüler nutzen das Gradmaß und das Bogenmaß von Winkeln und bestimmen näherungsweise den Sinus und den Kosinus eines Winkels als Koordinaten eines Punktes auf dem Einheitskreis. Mithilfe des Einheitskreises skizzieren die Schülerinnen und Schüler die Sinuskurve und die Kosinuskurve und begründen deren Eigenschaften.**	
	Gradmaß und Bogenmaß eines Winkels Sinus und Kosinus eines Winkels am Einheitskreis	
	Sinusfunktion	$f(x) = \sin(x)$
	Kosinusfunktion	$f(x) = \cos(x)$
	Eigenschaften	
	– Definitionsbereich – Wertebereich – Amplitude – Periode – Symmetrie	

BPE 10.2	**Die Schülerinnen und Schüler beschreiben anhand von Funktionstermen oder Funktionsgraphen, wie der Graph einer allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion mittels Transformationen – unter Berücksichtigung der Reihenfolge – aus einer Grundfunktion entsteht. Sie geben zu einer verbal oder grafisch gegebenen Transformation den zugehörigen Funktionsterm an.**	
	Transformationen $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$	z. B. Entstehung des Graphen von g mit $g(x) = -3\sin(\pi(x-2)) + 1$ aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$
	– Spiegelung an der y-Achse – Spiegelung an der x-Achse – Streckung in y-Richtung – Streckung in x-Richtung – Verschiebung in y-Richtung – Verschiebung in x-Richtung	
	– Kombination und Reihenfolge der Transformationen	$f(x) = 4 \cdot \sin(3(x+2)) - 1$ $f(x) = -3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 0,5$

BPE 10.3.	**Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Eigenschaften einer allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion ausgehend von einem Funktionsterm. In einfachen Fällen skizzieren sie den Funktionsgraph oder zeichnen diesen mithilfe einer Wertetabelle.**	
	Eigenschaften der Funktion bzw. ihres Graphen	
	– Wertebereich – Amplitude – Periode – Extrempunkte – Schnittpunkte mit der Mittellinie	
	Funktionsgraph	z. B. $f(x) = 2 \cdot \sin(\pi x) + 1$, $f(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$, $f(x) = \cos(2x - \pi)$

BPE 10.4	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus grafisch, tabellarisch oder verbal gegebenen Funktionseigenschaften den Funktionsterm einer allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion.**	
	Aufstellen von Funktionstermen aus	z. B. $f(x) = 2 \cdot \sin(\pi(x-3)) + 1$, $f(x) = -\cos\left(0,5\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 2$
	– Funktionsgraph – Text – Wertetabelle	
BPE 10.5	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösung trigonometrischer Gleichungen und erläutern, wie sie alle Lösungen im Definitionsbereich finden. Sie deuten die berechneten Lösungen grafisch als Nullstellen einer Funktion beziehungsweise als Schnittstellen von zwei Funktionen und geben die Lösungen im Definitionsbereich mit mathematischer Symbolsprache an.**	
	Lösen von Gleichungen	z. B. $0 = 2 \cdot \sin(\pi x) + 1$, $0 = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$, $0 = \cos(2x - \pi)$ Anzahl der Lösungen von $0 = t \cdot \sin(x) + 3$
	– Umkehrung der Rechenoperationen	Verwendung der Begriffe Arkussinus und Arkuskosinus
	– Symmetrie – Periode – Substitution	
	– Numerische Lösung	Wertetabelle
	– Darstellung unendlich vieler Lösungen	z. B. $\cos(x) = 0,5$ für $x \in R$ $x = -\frac{\pi}{3} + z \cdot 2\pi$ oder $x = \frac{\pi}{3} + z \cdot 2\pi$ mit $z \in Z$
BPE 10.6	**Die Schülerinnen und Schüler beschreiben periodische Vorgänge mit trigonometrischen Funktionen und deuten die Funktionseigenschaften im Anwendungskontext. Sie verwenden Gleichungen zur Untersuchung realistischer Probleme und interpretieren die Lösungen.**	
	Periodische Vorgänge	z. B. Gezeiten, Temperaturverlauf, Riesenrad, akustische Schwingungen, Wechselspannung, Biorhythmus

BPE 11	**Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen**	**5**

Die Schülerinnen und Schüler verknüpfen bisher bekannte Funktionen mittels Addition und Multiplikation und erweitern damit sowohl ihre Vorstellung von Rechenoperationen als auch ihr Repertoire an Funktionen. Sie wiederholen die Eigenschaften der bekannten Funktionen und übertragen ihre Strategien zur Funktionsuntersuchung, um exemplarisch die Eigenschaften von Summen- beziehungsweise Produktfunktionen zu ermitteln. Außerdem lernen die Schülerinnen und Schüler die Verkettung sowie die Umkehrung von Funktionen kennen und machen Erfahrungen mit dem Konzept der Umkehrfunktion.

BPE 11.1	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Funktionsterme durch Verknüpfung aus bereits bekannten Funktionstypen. Sie untersuchen ausgehend von ihren Kenntnissen über bereits bekannte Funktionstypen Eigenschaften der durch die Verknüpfung entstandenen Funktionen.**	
	Summe von Funktionen Ordinatenaddition	z. B. $f(x) = 2e^x - x + 1$ $f(x) = e^x - 0,1 \cdot e^{2x}$ $f(x) = \sin(x) + 0,5x$
	Produkt von Funktionen	z. B. $f(x) = e^x \cdot (x-2)^2$ $f(x) = \cos(x) \cdot x$
	Funktionseigenschaften – gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen – Symmetrie – Asymptote	

BPE 11.2	**Die Schülerinnen und Schüler identifizieren bei einer verketteten Funktion die äußere und die innere Funktion.**	
	Verkettung von Funktionen	z. B.
	Äußere Funktion	$f(x) = (2x+1)^4$; $f(x) = \sqrt{1-x}$
	Innere Funktion	$f(x) = e^{x^2}$; $f(x) = 3 \cdot \sin(5 \cdot (x+2))$

BPE 11.3	**Die Schülerinnen und Schüler beurteilen anhand ihres Graphs, ob eine Funktion umkehrbar ist und deuten die Wurzelfunktion sowie die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktionen.**	
	Umkehrbarkeit	eingeschränkter Definitionsbereich, Monotoniebereiche, Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden
	Umkehrfunktion – $f(x) = \sqrt{x}$ – $f(x) = \ln(x)$	Definitions- und Wertbereich Grad Celsius – Fahrenheit, Währungsumrechnung, Bremsweg

BPE 12	**Differenzialrechnung**	**25**

Die Bildungsplaneinheit Differenzialrechnung nimmt ihren Ausgang von den in der Eingangsklasse erworbenen Vorstellungen zum Ableitungsbegriff und hat zum Ziel, den Schülerinnen und Schülern ein tieferes Verständnis von Funktionen zu eröffnen. Basierend auf einem propädeutischen Grenzwertbegriff erleben sie durch Grenzwertbetrachtungen, dass die Frage nach der Steigung einer gekrümmten Kurve auf die Frage nach der Steigung einer Geraden zurückgeführt werden kann. Neben der Grundvorstellung der Tangentensteigung bilden die Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen lokale Änderungsrate und lokale Linearität aus und setzen diese drei Grundvorstellungen zueinander in Beziehung. Anhand von vielfältigen innermathematischen Fragestellungen und Anwendungsbezügen gewinnen sie einen ersten Eindruck von der Tragweite der Differenzialrechnung.

BPE 12.1	**Die Schülerinnen und Schüler deuten mithilfe eines propädeutischen Grenzwertbegriffs den Differenzialquotienten an einer Stelle als Grenzwert des Differenzenquotienten und erläutern die Existenz des Grenzwerts. Sie beschreiben Graphen von Funktionen, die nicht durchgängig differenzierbar sind; in einfachen Fällen berechnen sie den Differenzialquotienten.**	
	Differenzenquotient Differenzialquotient, Ableitung Schreibweisen: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}$ $= f'(x_0)$	
	Anschauliche Differenzierbarkeit	„Knickfreiheit“
BPE 12.2	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen ausgehend vom grafischen Differenzieren Ableitungen für ausgewählte Funktionen. Sie nennen die Bedeutung der Eulerschen Zahl e als besondere Basis bei Exponentialfunktionen zur Berechnung ihrer Ableitung. Außerdem beschreiben sie den Zusammenhang von trigonometrischen Funktionen mit ihren Ableitungsfunktionen und nennen die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion.**	
	Ableitung von	
	– Potenzfunktionen	auch für nicht natürliche Exponenten
	– e^x – $\sin(x), \cos(x)$ – $\ln(x)$	
BPE 12.3	**Die Schülerinnen und Schüler wenden die Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen an und nutzen Kombinationen dieser Regeln in einfachen Fällen.**	
	Allgemeine Ableitungsregeln	
	– Faktorregel	
	– Summenregel	
	– Produktregel	
	– Kettenregel	Quotientenregel als Kombination von Produkt- und Kettenregel
	– Kombinationen der Ableitungsregeln	z. B. $f(x) = \sqrt{x} + \sin(\pi x)$ $f(x) = e^{0,5 \cdot x} \cdot \cos(2x + 1)$ $f(x) = 0,2^x + \ln(x) = e^{\ln(0,2) \cdot x}$ $+ \ln(x)$ $f(x) = e^{-x^2}$ $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ mit $a, k \in R$

BPE 12.4	**Die Schülerinnen und Schüler skizzieren den Graph einer Funktion aus der Kenntnis des Graphs der Ableitungsfunktion und erläutern den Zusammenhang beider Graphen. Sie begründen die Nicht-Eindeutigkeit der Stammfunktion. Darüber hinaus bestimmen sie Stammfunktionen von Grundfunktionen, deren Linearkombination und deren lineare Verkettung und wenden Ableitungsregeln zur Überprüfung an. Die Schülerinnen und Schüler nutzen die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \rightarrow \frac{1}{x}$.**	
	Stammfunktionen $F(x) + c$	z. B. Stammfunktion F zu $f(x) = 2x^3 - 2x^2$ $f(x) = x^{0,5}$ $f(x) = 2x^{-3}$ $f(x) = (3x - 1)^4$ $f(x) = e^{-2x+1}$ $f(x) = \sin(3x + 1) + 0,5x$ $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$
	– grafisch – formal	
BPE 12.5	**Die Schülerinnen und Schüler bestimmen eine Gleichung der Tangente in einem gegebenen Punkt eines Funktionsgraphen. Sie prüfen, ob eine gegebene Gerade Tangente an einem Funktionsgraphen ist.**	
	Tangente in einem Kurvenpunkt	$t: y = f'(u)(x - u) + f(u)$ bei gegebener Funktion f und Stelle u
BPE 12.6	**Die Schülerinnen und Schüler untersuchen mittels erster und zweiter Ableitung das lokale Verhalten einer Funktion. Mithilfe notwendiger und hinreichender Kriterien ermitteln sie lokale Extrem- und Wendepunkte und nutzen diese, um Funktionsgraphen zu zeichnen. Darüber hinaus beschreiben die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge der Graphen von f, f' und f'' und interpretieren Wendepunkte auch als Punkte mit größter bzw. kleinster Steigung.**	
	Lokal	
	– Extrempunkte	
	– Wendepunkte mit Krümmungsverhalten	
	– notwendige Bedingungen	
	– hinreichende Bedingungen	Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an der Stelle x_0 oder $f''(x_0) \neq 0$
	Funktionsgraph	
	Zusammenhang zwischen den Graphen von $f - f' - f''$	
BPE 12.7	**Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Funktionen auf strenge Monotonie und bestimmen ihre Wertemenge anhand von Graphen, Funktionstermen und Wertetabellen.**	
	Global	
	– Globale Extrema	

	– Wertemenge	
	– strenge Monotonie	streng monoton wachsend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Zusammenhang zur Ableitung: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend

BPE 12.8 **Die Schülerinnen und Schüler interpretieren Änderungsraten und Krümmungsverhalten sowie Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte von Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.**

Sachzusammenhang	z. B. Temperaturänderung, Bewegungsvorgänge, Produktionsprozesse, Konzentrationsänderung

BPE 13 **Integralrechnung** **15**

Die Bildungsplaneinheit Integralrechnung knüpft an die von den Schülerinnen und Schülern bereits erworbenen Kenntnisse der Differenzialrechnung an und legt den Zusammenhang zwischen diesen grundlegenden Teilgebieten der Analysis dar. Sie vermittelt drei Aspekte des Integralbegriffs, das Integral als Rekonstruktion einer Größe, das Integral als Grenzwert einer Summe sowie das Integral als Flächeninhalt und bezieht diese wechselseitig aufeinander. Ausgehend von der Annäherung krummlinig begrenzter Flächen wird mithilfe einer propädeutischen Grenzwertbetrachtung ein neuer Weg zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten entwickelt. Sie greift insbesondere die in der Sekundarstufe I verwendeten Strategien zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten auf, z. B. die Zerlegung in Teilflächen beziehungsweise Teilkörper. Bekannte Formeln zur Berechnung von Volumen werden mittels Integralrechnung bestätigt.

BPE 13.1 **Die Schülerinnen und Schüler deuten das bestimmte Integral als rekonstruierten Bestand sowie als Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse. Sie ermitteln den Wert bestimmter Integrale mittels Flächenzerlegung näherungsweise und nutzen den propädeutischen Grenzwertbegriff beim Übergang von Unter- und Obersummen zum bestimmten Integral. Schließlich interpretieren die Schülerinnen und Schüler den Wert eines bestimmten Integrals als Bilanz orientierter Flächeninhalte und erläutern die Eigenschaften des bestimmten Integrals.**

Deutung des bestimmten Integrals	
– Bestandsrekonstruktion	z. B. zurückgelegte Strecke bei veränderlicher Geschwindigkeit
– Fläche	gekrümmte Randfunktion
Näherungsweise Berechnung von Integralen	z. B. Kästchenzählen
Ober- und Untersumme mit Summenschreibweise: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$	
Bestimmtes Integral als Grenzwert einer Summe	$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$
Orientierter Flächeninhalt	z. B. Zu- und Abflussmenge
Eigenschaften des bestimmten Integrals	Vertauschen der Integrationsgrenzen, Intervalladditivität, Linearität des Integrals,

	Integralwert ist Null bei ungeraden Funktionen und zu $x = 0$ symmetrischen Integrationsgrenzen

BPE 13.2 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung mithilfe der Integralfunktion geometrisch sowie anschaulich als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff. Den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung nutzen sie zur Berechnung von bestimmten Integralen und zur Berechnung von Integrationsgrenzen bei gegebenem Integralwert.**

Integralfunktion	$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	$I_a{}'(x) = f(x)$
Berechnung bestimmter Integrale	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

BPE 13.3 **Die Schülerinnen und Schüler berechnen Flächeninhalte und Volumen von Körpern, die durch Rotation um die x-Achse entstehen, auch im Kontext der Anwendung. Sie weisen elementargeometrische Volumenformeln nach.**

Flächeninhalte

- zwischen Funktionsgraph und x-Achse
- zwischen zwei Funktionsgraphen

Rotationsvolumen

- Rotation einer mit der x-Achse begrenzten Fläche

Anwendungsaufgaben	z. B. Fläche eines Grundstücks, Volumen einer Vase, zurückgelegte Strecke bei gegebener Momentangeschwindigkeit

BPE 14 Aufstellen von Funktionstermen 5

Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften. Sie übersetzen sprachliche Formulierungen in entsprechende formale Bedingungen oder entnehmen benötigte Informationen aus gegebenen Funktionsgraphen.

BPE 14.1 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus verbal, grafisch oder tabellarisch gegebenen Funktionseigenschaften einen zugehörigen Funktionsterm. Sie entscheiden sich für einen geeigneten Ansatz und ermitteln aus den gegebenen Eigenschaften passende Gleichungen und lösen gegebenenfalls das entstehende Gleichungssystem.**

Ansatz	z. B. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$ $f(x) = ae^{kx} + b$ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ Ansatz kann bereits gegeben sein. $f(x) = a \cdot e^{kx} \cdot (x - c)^2$

	$f(x) = a \cdot \cos(bx) + m \cdot x$
Formalisierung der Eigenschaften	z. B. K hat einen Hochpunkt in $H(2\|4)$ $f(2) = 4$ und $f'(2) = 0$ waagrechte Asymptote $y = 4$ Periode 4π „tangentiale Straßenverbindung“ steilste Stelle
Lösen des Gleichungssystems	

BPE 15 **Optimieren** **15**

Durch eigenständige Bearbeitung verschiedener Optimierungsprobleme erfahren die Schülerinnen und Schüler die Wirksamkeit mathematischer Werkzeuge bzw. Begriffe. Sie üben implizit bereits erworbene mathematische Fertigkeiten und vernetzen mathematische Begriffe verschiedener Wissensgebiete. In der Begegnung mit der grundlegenden mathematischen Idee der Optimierung erweitern die Lernenden ihre Problemlöse- und Modellierungskompetenz. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass den Optimierungsproblemen trotz ihrer Unterschiede vieles gemeinsam ist und sind so in der Lage, eine erarbeitete Lösungsstrategie auf verschiedene Optimierungsprobleme anzuwenden.

BPE 15.1 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben auf der Grundlage ihrer Kenntnisse aus der Elementargeometrie, der Analysis, der Vektorgeometrie sowie der Stochastik Optimierungsaufgaben mathematisch und bestimmen die Lösungen dieser mithilfe unterschiedlicher Lösungsstrategien. Sie beurteilen Lösungsansätze, interpretieren den Gültigkeitsbereich ihrer mathematischen Beschreibung und erläutern das Vorgehen zur Lösung von Optimierungsproblemen in unterschiedlichen Kontexten.**

Innermathematische Optimierung	
– Optimierung an Funktionsgraphen	z. B. Abstand Punkt – Funktionsgraph, vertikaler Abstand Graph – Graph, Flächeninhalt eines Vielecks unter einem Funktionsgraphen, Umfang eines Vielecks unter einem Funktionsgraphen
– Optimierung in Stochastik und Vektorgeometrie	z. B. optimales p bei B (n,p,k)-Verteilungen, minimaler Abstand von zwei bewegten Objekten, Abstand Punkt – Gerade
Anwendungsorientierte Optimierung	z. B. Oberflächenminimierung einer Dose, optimale Schachtel, kostengünstigste Umgehungsstraße Vierstädteproblem, kürzester Weg auf einer Körperoberfläche, Gewinnmaximierung, kürzester Lichtweg bei Spiegelung/Brechung, Überbuchungsprobleme

BPE 16	**Vektorielle Geometrie – Vertiefung**	**25**

Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihr Wissen zur Darstellung von Geraden durch die vektorielle Beschreibung mithilfe einer Parametergleichung. Sie erkennen die Tragfähigkeit dieser Darstellung insbesondere auch im dreidimensionalen Raum und übertragen diese auf die Beschreibung von Ebenen. Bei der Darstellung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatensystem sowie der Untersuchung von deren Lagebeziehungen wird das räumliche Vorstellungsvermögen weiter geschult. Damit können die Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme geometrisch interpretieren und ihre Lösung deuten. Schließlich führen sie Flächen- und Volumenberechnungen an Objekten im Raum durch und modellieren reale Situationen mithilfe geometrischer Objekte.

BPE 16.1 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Geraden mithilfe von Parametergleichungen und untersuchen deren besondere Lage im Koordinatensystem. Außerdem beurteilen sie, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Sie berechnen Spurpunkte und zeichnen Geraden im Koordinatensystem. Darüber hinaus werden Schnittwinkel zwischen Gerade und Koordinatenebenen berechnet.**

Parametergleichung einer Geraden Besondere Lage im Koordinatensystem	
Punktprobe	z. B. $P(1\|2\|3)$, $Q(1\|2\|a)$
Spurpunkte Veranschaulichung im Koordinatensystem	
Schnittwinkel zwischen Gerade und Koordinatenebenen	z. B. mithilfe eines auf der Koordinatenebene senkrechten Vektors oder mittels orthogonaler Projektion

BPE 16.2 **Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die gegenseitige Lage von Geraden und berechnen Koordinaten von Schnittpunkten und Schnittwinkel. Sie geben Gleichungen von Geraden an, die gegebene Lagebeziehungen erfüllen.**

Lagebeziehungen von Geraden	
– identisch	
– parallel	z. B. Parallelität von g und h mit $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$; $h: \overrightarrow{x} = s \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix}$
– windschief – schneiden sich in einem Punkt	Lösbarkeit überbestimmter linearer Gleichungssysteme
Schnittwinkel zwischen zwei Geraden	

BPE 16.3 **Die Schülerinnen und Schüler ermitteln einen Normalenvektor und deuten diesen geometrisch als einen Vektor, der zu zwei Spannvektoren einer Ebene orthogonal ist. Sie nutzen zur Beschreibung einer Ebene verschiedene Darstellungsformen und ermitteln Ebenengleichungen aus Punkten und Geraden.**

Vektorprodukt

Normalenvektor

Darstellung von Ebenen

– Parameterform

	– Koordinatenform	Normalenform, Achsenabschnittsform
	Aufstellung von Ebenengleichungen	
	– drei Punkte – Punkt und Gerade – zwei Geraden	

BPE 16.4 **Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die besondere Lage von Ebenen im Koordinatensystem. Sie beurteilen, ob ein Punkt auf einer Ebene liegt. Die Schülerinnen und Schüler ermitteln Koordinaten von Spurpunkten sowie Gleichungen von Spurgeraden und zeichnen Ebenen im Koordinatensystem.**

Besondere Lage im Koordinatensystem
Punktprobe
Spurpunkte und Spurgeraden
Veranschaulichung im Koordinatensystem

BPE 16.5 **Die Schülerinnen und Schüler untersuchen die gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden. Sie bestimmen die Koordinaten des Schnittpunktes von Gerade und Ebene und eine Gleichung der Schnittgerade zwischen zwei Ebenen. Die Schülerinnen und Schüler geben Geraden und Ebenen an, die gegebene Lagebeziehungen erfüllen.**

Lagebeziehungen von Gerade und Ebene	Interpretation der Lösungsvielfalt des zugehörigen LGS
– Gerade liegt in Ebene	
– Gerade liegt parallel zur Ebene	z. B. Parallelität von g und E $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $E: tx_1 + tx_2 - 4x_3 = 4t$
– Gerade schneidet Ebene im Durchstoßpunkt – Orthogonalität zwischen Gerade und Ebene	
Lagebeziehungen von zwei Ebenen	
– identisch – parallel – schneiden sich in einer Schnittgerade	

BPE 16.6 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Abstände und berechnen Volumen von elementaren geometrischen Objekten im Raum.**

Abstand	
– Punkt und Punkt	
– Punkt und Gerade – parallele Geraden	
– Punkt und Ebene	Lotfußpunkt, Spiegelung an einer Ebene
– Gerade und Ebene – parallele Ebenen	

Volumen

- Quader
- Pyramide

BPE 16.7	Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösung geometrischer Problemstellungen im Sachzusammenhang und interpretieren die Ergebnisse im Kontext der Anwendung.

Bewegungsabläufe	z. B. Flugzeuge, Schiffe
Projektion auf Koordinatenebene	z. B. Schattenwurf, Laserstrahl

BPE 17	Stochastik	45

In der Stochastik werden Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Elementen der beurteilenden Statistik verzahnt. Basierend auf dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff differenzieren die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis von Wahrscheinlichkeit weiter aus, indem sie unterschiedliche Zugänge zum Begriff Wahrscheinlichkeit kennen lernen. In Zufallsexperimenten und Simulationen erleben die Schülerinnen und Schüler das Wesen des Zufalls. Sie erkennen, dass Zufall mit Mitteln der Mathematik quantifizierbar ist. Die Schülerinnen und Schüler werden für die Beurteilung von zufälligen Ereignissen sensibilisiert, um zufällige Alltagssituationen und statistische Aussagen kritisch hinterfragen und bewerten zu können.

BPE 17.1	Die Schülerinnen und Schüler führen Zufallsexperimente und deren Simulationen durch und deuten dabei auftretende relative Häufigkeiten als Näherung von Wahrscheinlichkeiten. Reale Situationen beschreiben sie als Zufallsexperimente und beurteilen, ob ein Zufallsexperiment ein Laplace-Experiment ist. Sie nutzen Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von erwarteten absoluten oder relativen Häufigkeiten und stellen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen tabellarisch dar.

Zufallsexperimente	
– ein- und mehrstufige Zufallsexperimente: Ziehen mit und ohne Zurücklegen	
– Laplace-Experimente	Abgrenzung zu Nicht-Laplace-Experimenten
Häufigkeiten	
Simulation	empirisches Gesetz der großen Zahlen
Wahrscheinlichkeiten	
Wahrscheinlichkeitsverteilung	

BPE 17.2	Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Begriffe Ergebnis und Ereignis im Kontext von Zufallsexperimenten. Sie geben die Ergebnisse von Zufallsexperimenten an und beschreiben Ereignisse in Worten und stellen diese als Mengen beziehungsweise deren Verknüpfung dar.

Ergebnis
Ereignis
Sicheres Ereignis
Unmögliches Ereignis
Gegenereignis

Verknüpfte Ereignisse	
Mengendarstellung	z. B. Ergebnismenge beim einmaligen Würfeln: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Ereignis A: Eine gerade Zahl wird gewürfelt. $A = \{2; 4; 6\}$
Symbolschreibweise von Ereignissen und deren Verknüpfungen	z. B. A; $\bar{A}$; $A \cap \bar{B}$; $A \cup B$

BPE 17.3 **Die Schülerinnen und Schüler stellen stochastische Sachverhalte mittels Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln dar und interpretieren die darin enthaltenen Informationen. Sie berechnen die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mit geeigneten Methoden, berechnen bedingte Wahrscheinlichkeiten und untersuchen Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit.**

Baumdiagramm	
Vierfeldertafel	Venn-Diagramm, Wechsel der Darstellungsformen
Laplace-Formel	
Nutzung des Gegenereignisses	z. B. 3-Mal-Mindestens-Aufgaben
Pfadregeln Additionssatz Bedingte Wahrscheinlichkeiten Stochastische Unabhängigkeit	

BPE 17.4 **Die Schülerinnen und Schüler deuten eine reale Situation als kombinatorische Fragestellung und ermitteln die Anzahl von Möglichkeiten in einfachen Fällen.**

Permutation: $n!$	z. B. Zuordnung von vier Personen auf vier Plätze
Variation: n^k	z. B. Zahlenschloss
Kombination: $\binom{n}{k}$	z. B. Lotto „6 aus 49“ Pascal'sches Dreieck

---

BPE 17.5 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Begriffe Zufallsgröße und Erwartungswert. Sie ermitteln die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsgröße und stellen diese als Wertetabelle dar. Sie berechnen weiterhin den Erwartungswert und deuten diesen im Sachzusammenhang.**

Diskrete Zufallsgröße Wahrscheinlichkeitsfunktion	
Erwartungswert	faires Spiel Standardabweichung, Varianz

BPE 17.6	**Die Schülerinnen und Schüler entscheiden, ob ein Zufallsexperiment ein Bernoulli-Experiment beziehungsweise eine Bernoulli-Kette darstellt. Sie geben die Zufallsgröße und die Parameter an und erläutern die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels der Formel von Bernoulli an Beispielen. Sie berechnen Wahrscheinlichkeiten mit dieser Formel unter Verwendung der mathematischen Symbolsprache. Darüber hinaus ermitteln die Schülerinnen und Schüler eine unbekannte Kenngröße.**	
	Bernoulli-Experiment	
	Bernoulli-Kette Binomialkoeffizient Formel von Bernoulli Kumulierte Wahrscheinlichkeit	Zufallsgröße X, Parameter: n, p, k
	Mathematische Symbolsprache	z. B. $P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^8$ $P(X<5)=\sum_{i=0}^{4}P(X=i)$ $P(X\geqslant 5); P(2<X\leqslant 10)$
BPE 17.7	**Die Schülerinnen und Schüler stellen die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion einer binomialverteilten Zufallsgröße tabellarisch und grafisch dar und erläutern den Einfluss der Parameter n und p. Sie interpretieren tabellarische oder grafische Binomialverteilungen im Anwendungskontext und ermitteln aus entsprechenden Darstellungen Näherungswerte für Wahrscheinlichkeiten.**	
	Binomialverteilte Zufallsgröße	z. B. Anzahl Kopf beim Werfen einer Münze, Anzahl fehlerhafter Werkstücke
	Binomialverteilung	
	Wahrscheinlichkeitsfunktion	Histogramm
	Verteilungsfunktion	
BPE 17.8	**Die Schülerinnen und Schüler ermitteln den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von binomialverteilten Zufallsgrößen und interpretieren den Erwartungswert im Anwendungszusammenhang. Sie erläutern die Bedeutung von Erwartungswert und Standardabweichung anhand der grafischen Darstellung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen, insbesondere bei Approximation der Binomialverteilung durch eine zur Geraden x = μ symmetrischen Glockenkurve.**	
	Erwartungswert Varianz Standardabweichung	
	Approximation durch eine Glockenkurve	Normalverteilung
BPE 17.9	**Die Schülerinnen und Schüler nennen Beispiele für diskrete und stetige Zufallsgrößen. Sie untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen. Weiterhin nennen sie die Bedeutung der Parameter und im Anwendungskontext sowie für den Graph der Dichtefunktion und geben deren Funktionsterm an. Sie berechnen Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen und interpretieren diese als Fläche unter dem Graph der Dichtefunktion.**	
	Normalverteilte Zufallsgröße	z. B. Messfehler, Lebensdauern, Blattlängen
	Dichtefunktion	Glockenkurve
	Erwartungswert μ	

Standardabweichung σ	
Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen	Fläche unter dem Graph der Dichtefunktion

BPE 17.10 **Die Schülerinnen und Schüler erläutern die Sigma-Regeln für Normal- und Binomialverteilungen. Sie berechnen für diese Verteilungen Prognoseintervalle und interpretieren diese im Anwendungskontext.**

Sigma Regeln	Plausibilität der Laplace-Bedingung durch Simulation
Prognoseintervall	z. B. $c \cdot \sigma$-Umgebungen für $c \in \{1; 2; 3\}$ Intervalle zu den Sicherheitswahrscheinlichkeiten 90 %, 95 % und 99 %

BPE 17.11 **Die Schülerinnen und Schüler legen beispielhaft den Unterschied zwischen einem Prognoseintervall und einem Konfidenzintervall dar. Sie deuten die relative Häufigkeit der Treffer bei Bernoulli-Experimenten als Punktschätzung für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit. Die Schülerinnen und Schüler berechnen Konfidenzintervalle und interpretieren diese im Anwendungskontext. Schließlich erläutern sie den Zusammenhang zwischen der Größe der Stichprobe und der Länge des Konfidenzintervalls.**

Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten	Punktschätzer
Konfidenzintervall	zu den Vertrauensniveaus 90 %, 95 %, 99 %

BPE 18 Lineare Gleichungssysteme 10

Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihr Wissen aus der Sekundarstufe I zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und lernen das Gauß-Eliminationsverfahren als leistungsfähige Lösungsmethode kennen.

BPE 18.1 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen die Lösungen linearer Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten, in einfachen Fällen auch mit einem Parameter. Sie nutzen neben den bekannten Verfahren den Gauß-Algorithmus und interpretieren die Lösungsvielfalt.**

Gauß-Algorithmus	Matrixschreibweise
Lösungsvielfalt	z. B. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ $3x_1 + 2x_2 \qquad = 5$ $3x_1 + 2x_2 + px_3 = 4$
– eindeutig lösbar – unlösbar	
– mehrdeutig lösbar	Vektorschreibweise der Lösungsmenge

BPE 19*	WG: Beschreibung von Produktionsprozessen durch Matrizen	25

Die Schülerinnen und Schüler lernen Sachverhalte aus den Anwendungsbereichen der Wirtschaftswissenschaften mit Matrizen und Vektoren darzustellen. Dabei wenden sie die Matrizenmultiplikation und die Invertierung von Matrizen an. Im Mittelpunkt stehen hierbei Modellierungsprozesse und die Entwicklung verschiedener Lösungsstrategien, jedoch keine aufwändigen Berechnungen.

BPE 19.1 **Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Matrix-Schreibweise und erläutern Sonderformen. Die Schülerinnen und Schüler führen Rechenoperationen mit Matrizen durch und bestimmen die Lösung von Matrizengleichungen im Kontext der ein- und zweistufigen Produktionsprozesse.**

Matrix

- Einheitsmatrix
- Diagonalmatrix

Rechenoperationen mit Matrizen

- Addition
- skalare Multiplikation
- Multiplikation von Matrix und Vektor
- Matrizenmultiplikation
- Invertieren von Matrizen
- Matrizengleichungen — z. B. $A \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{r}$; $\overrightarrow{k_v} = \overrightarrow{k_R} \cdot C + \overrightarrow{k_Z} \cdot B + \overrightarrow{k_E}$

BPE 19.2 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben ein- und zweistufige Produktionsprozesse mit Verflechtungsdiagrammen, Tabellen oder Matrizen und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen. Sie deuten Zahlenwerte aus diesen Darstellungen im Sachzusammenhang.**

Ein- und zweistufige Produktionsprozesse

- Text
- Diagramm
- Tabelle
- Matrix

PE 19.3 **Die Schülerinnen und Schüler berechnen eine Verflechtungsmatrix aus zwei gegebenen Verflechtungsmatrizen. Sie bestimmen Produktions- und Verbrauchsvektoren und ermitteln Erlöse, Kosten und Gewinne. Außerdem entwickeln sie verschiedene Lösungsstrategien zur Bestimmung der gesuchten Größen und interpretieren ihre Ergebnisse im wirtschaftlichen Kontext.**

Verflechtungsmatrizen

- Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix
- Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
- Rohstoff-Endprodukt-Matrix

Produktionsvektor
Rohstoffvektor
Erlös
Kosten
Gewinn

BPE 20*	TG: Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen	25

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben elementargeometrische Abbildungen in der Ebene mit Mitteln der linearen Algebra. Sie verwenden Matrizen und Vektoren zur Bestimmung der Koordinaten von Bildobjekten und erkennen den Zusammenhang geometrischer Sachverhalte mit den zugehörigen Strukturen der Matrizenrechnung.

BPE 20.1 **Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Matrix-Schreibweise und erläutern Sonderformen; sie führen Rechenoperationen mit 2x2-Matrizen durch und deuten diese im Zusammenhang mit Abbildungen.**

Matrix

- Einheitsmatrix
- Diagonalmatrix

Rechenoperationen mit Matrizen

- Addition
- skalare Multiplikation
- Multiplikation von Matrix und Vektor
- Matrizenmultiplikation
- Invertieren von Matrizen — z. B. im Kontext der Umkehrabbildung

BPE 20.2 **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben elementare Abbildungen in der Ebene mithilfe von Vektoren und Matrizen. Sie interpretieren für diese Abbildungen die Elemente von Matrix und Vektor in der Matrixdarstellung geometrisch. Sie stellen affine Abbildungen mithilfe von Koordinaten- oder Matrizengleichungen dar und bestimmen die Koordinaten eines Bildpunktes bzw. eine Gleichung einer Bildgeraden.**

Elementare Abbildungen in der Ebene

- Verschiebung
- Spiegelung an Koordinatenachsen
- Streckung am Ursprung
- Streckung in eine Koordinatenrichtung — Sonderfall: Orthogonalprojektion auf eine Koordinatenachse
- Drehung um den Ursprung

Darstellungen von affinen Abbildungen

- Gleichungen der Bildkoordinaten — $x'_1 = 2x_1;\ x'_2 = -x_2 + 3$
- Matrixdarstellung — $\overrightarrow{x'} = A \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{c}$
Zusammenhang mit den Koordinaten der Bildpunkte von $O(0|0),\ E_1(1|0),\ E_2(0|1)$

Abbildung von Punkten und Geraden

- Koordinaten des Bildpunktes
- Gleichung der Bildgeraden

BPE 20.3	**Die Schülerinnen und Schüler bilden aus elementaren Abbildungen durch Verkettung neue Abbildungen. Sie nutzen dabei die Matrizenalgebra zur effektiven Bestimmung der Matrixdarstellung der dabei entstehenden Abbildungen.**	
	Verkettung elementarer Abbildungen	Matrizenmultiplikation
	– Spiegelung und Verschiebung	z. B. Spiegelung an einer achsenparallelen Geraden
	– Spiegelung und Drehung	z. B. Spiegelung an einer Ursprungsgeraden
	– Drehung und Drehung	Drehung (Additionstheoreme)
	– Drehung und Streckung	Drehstreckung
	– Drehung und Verschiebung	z. B. Drehung um einen beliebigen Punkt

BPE 21* **AG, BTG, EG, SGG: Beschreibung von Austausch- und Populationsprozessen durch Matrizen** **25**

Die Schülerinnen und Schüler stellen Sachverhalte aus Anwendungsbereichen, beispielsweise aus der Soziologie und der Biologie, mit Matrizen und Vektoren dar. Sie verwenden Matrizen zur Modellierung von Zustandsänderungen bei Übergangs- und Populationsprozessen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Bedeutung der Matrizenrechnung für die Vorhersage langfristiger Entwicklungen in Natur und Gesellschaft.

BPE 21.1	**Die Schülerinnen und Schüler nutzen die Matrix-Schreibweise und erläutern Sonderformen; sie führen Rechenoperationen mit Matrizen durch.**	
	Matrix – Einheitsmatrix – Diagonalmatrix	
	Rechenoperationen mit Matrizen – Addition – skalare Multiplikation – Multiplikation von Matrix und Vektor – Matrizenmultiplikation – Invertieren von Matrizen	
	– Potenzieren von Matrizen	z. B. B^3 mit $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

BPE 21.2	**Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Zustandsänderungen von Systemen in Natur und Gesellschaft. Sie erläutern mithilfe von Diagrammen, Tabellen und Matrizen die betrachteten Übergangsprozesse und wechseln zwischen den Darstellungsformen.**	
	Übergangsprozesse – Text – Diagramm – Tabelle – Matrix	

BPE 21.3	**Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Austauschprozesse mithilfe stochastischer Matrizen. Sie begründen den Aufbau der Übergangsmatrix für ein vorgegebenes Modellierungsproblem und interpretieren deren Elemente als Wahrscheinlichkeiten. Sie berechnen ausgehend von einer Anfangsverteilung den Verteilungsvektor nach einer oder mehreren Perioden. Die Schülerinnen und Schüler bestimmen weiterhin Stabilitätsvektoren und Grenzmatrizen und interpretieren diese im Sachzusammenhang; sie erläutern den absorbierenden Zustand als besondere stabile Verteilung.**	
	Stochastische Matrizen Verteilungsvektor Stabilitätsvektor (Fixvektor) Grenzmatrix Absorbierender Zustand	z. B. Käuferverhalten, Wählerwanderungen, Kreuzung von Pflanzen, Verhaltensforschung

BPE 21.4	**Die Schülerinnen und Schüler deuten die Elemente von Übergangsmatrizen für eine Populationsentwicklung als Vermehrungs- beziehungsweise Überlebensraten. Sie berechnen ausgehend von einer Startpopulation deren Größe nach einer oder mehreren Perioden und stellen diese grafisch dar. Schließlich untersuchen die Schülerinnen und Schüler die langfristige Populationsentwicklung und bestimmen die Anzahl der Übergänge eines Zyklus.**	
	Vermehrungsrate Überlebensrate Startpopulation Populationsentwicklung – zyklische Wiederholung,Länge eines Zyklus – zyklisches Wachstum – zyklische Abnahme	z. B. Insekten (Eier-Larve-Insekt), Maikäfer (Eier-Larve-Puppe-Käfer)

BPE 22	**Wahlgebiete**	**20**

Mit der Bearbeitung eines oder mehrerer Wahlgebiete erweitern die Schülerinnen und Schüler ihr Bild der Mathematik und übertragen bereits erworbene Kompetenzen auf neue mathematische Kontexte. Sie lernen dabei weitere Arbeitsweisen und Lernstrategien kennen, welche durch Anwendung auf sehr komplexe Sachverhalte die mathematischen Kompetenzen weiter vertiefen und damit in besonderer Weise auf ein Hochschulstudium vorbereiten. Zur Vertiefung und Kompetenzsteigerung eignen sich vor allem auch die Inhalte des Bildungsplans Mathe +.

BPE 22.1	**Die Schülerinnen und Schüler legen wesentliche Inhalte eines oder mehrerer Themen dieser Bildungsplaneinheit dar und wenden aus diesem Bereich mathematische Konzepte an.**	
	Methoden mathematischen Arbeitens – Argumentieren – Kommunizieren – Beweisen Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung – Quotientenregel – Stetigkeit und Differenzierbarkeit – partielle Integration – Mittelwert	

- uneigentliche Integrale

Folgen und Reihen

- Monotonie einer Zahlenfolge
- Beschränktheit einer Zahlenfolge
- Grenzwert einer Zahlenfolge
- Arithmetische Reihe
- Geometrische Reihe
- Konvergenz einer Reihe

Geschichte der Mathematik

- Lösen kubischer Gleichungen
- Geschichte des Zahlensystems
- Ethno-Mathematik
- Eulerscher Polyedersatz

Komplexe Zahlen

- Rechnen in der algebraischen Form (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division)
- Lösen quadratischer Gleichungen — z. B. $4x^2 + 2 = 0,\ x^2 + x + 1 = 0$

Hypothesentests

- Links- und rechtsseitiger Test
- Fehler 1. Art
- Interpretation Fehler 2. Art

Leontief-Modell

- Verflechtungsdiagramm
- Input-Output-Tabelle
- Technologie-Matrix
- Leontief-Inverse
- Produktions- und Marktvektor

Splines

- Kubische Splines
- B-Splines

Weitere Themen — siehe z. B. Bildungsplan Mathe +

Operatorenliste

In den Zielformulierungen der Bildungsplaneinheiten werden Operatoren (= handlungsleitende Verben) verwendet. Diese Zielformulierungen (Standards) legen fest, welche Anforderungen die Schülerinnen und Schüler in der Regel erfüllen. Zusammen mit der Zuordnung zu einem der drei Anforderungsbereiche (AFB) dienen Operatoren einer Präzisierung. Dies sichert das Erreichen des vorgesehenen Niveaus und die angemessene Interpretation der Standards.

Anforderungsbereiche

Anforderungsbereich I umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten im gelernten Zusammenhang unter rein reproduktivem Benutzen eingeübter Arbeitstechniken (Reproduktion).

Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Erklären, Bearbeiten und Ordnen bekannter Inhalte und das angemessene Anwenden gelernter Inhalte und Methoden auf andere Sachverhalte (Reorganisation und Transfer).

Anforderungsbereich III umfasst den reflexiven Umgang mit neuen Problemstellungen, den eingesetzten Methoden und gewonnenen Erkenntnissen, um zu eigenständigen Begründungen, Folgerungen, Deutungen und Wertungen zu gelangen (Reflexion und Problemlösung).

Operator	**Erläuterung**	**Zuordnung AFB I-III**
angeben, nennen	für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig	I
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren), das Vorgehen ist darzustellen	II, III
berechnen	die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen	I, II, III
beschreiben	bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und gegebenenfalls einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu, eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig	II, III
bestimmen, ermitteln	die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren), das Vorgehen ist darzustellen	I, II, III
beurteilen	das zu fällende Urteil ist zu begründen	II, III
deuten, interpretieren	die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang	II, III

Operator	Erläuterung	Zuordnung AFB I-III
erläutern	die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen	II, III
entscheiden	für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig	I, II
grafisch darstellen, zeichnen	die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen	I
skizzieren	die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt	I, II, III
untersuchen	die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren), das Vorgehen ist darzustellen	II, III

vgl. Bildungsstandards Mathematik der KMK i. d. F. vom 18.10.2012