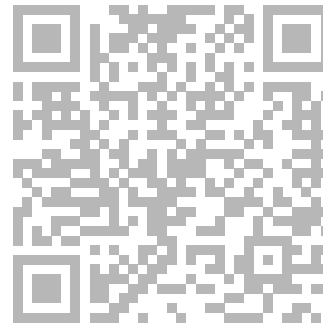


BPE 1 Die erste Bildungsplaneinheit umfasst Themen, die die Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I bereits kennengelernt haben können, die jedoch im Verlauf der Eingangsklasse in unterschiedlichen Aspekten vertieft und erweitert werden. Dabei ist nicht nur an eine inhaltliche Vertiefung gedacht; vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler anhand bekannter Themen an das Arbeiten in der Sekundarstufe II herangeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Grundvorstellung mathematischer Begriffe, die es ihnen erlaubt, Inhalte zu verknüpfen und mathematische Aussagen selbstständig abzuleiten. Sie lernen an einzelnen Beispielen den Beweis als wesentliches Element der Mathematik kennen und erfahren so ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte.



### Mittelstufenvertiefung

Exposition

Komplikation

Motivierung

Peripetie

Sicherung Zahlbereichserweiterung

Sicherung Funktionierung

Sicherung Darstellung

Sicherung Geradung

Sicherung Potenzrechnung

Retardation

Übung Zahlbereichserweiterung

Übung Funktionierung

Übung Darstellung

Übung Geradung

Übung Potenzrechnung

Katastrophe

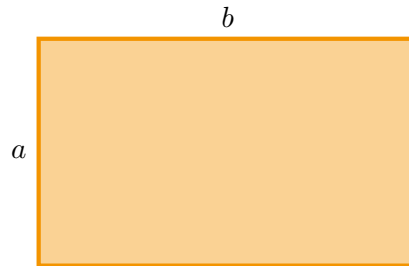
Testung



Pizza  
~~Mathe~~ liebsch

## 0 Motivierung

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise. Der Elefant befüllt den Pizzarand seiner Pizza mit einem Spezialkäse. Er hat noch Spezialkäse für 168 Längeneinheiten Pizzarand übrig, mit dem er eine rechteckige Pizza backen will. Er modelliert das Problem mit den Seitenlängen  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

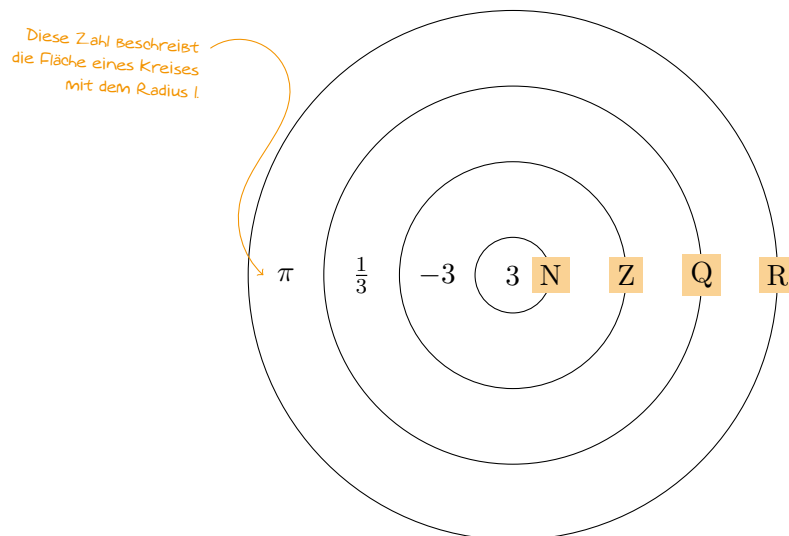


Ermittle mögliche Seitenlängen  $a$  und  $b$ , sodass die Pizza einen Flächeninhalt von 4200 Flächeneinheiten hat.



## 1 Sicherung Zahlbereichserweiterung

Die Schülerinnen und Schüler begründen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung auf reelle Zahlen.



|                   |                                                   |
|-------------------|---------------------------------------------------|
| Natürliche Zahlen | $N = \{0; 1; 2; \dots\}$                          |
| Ganze Zahlen      | $Z = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$           |
| Rationale Zahlen  | $Q = \{\text{Als Bruch darstellbare Zahlen}\}$    |
| Reelle Zahlen     | $R = \{\text{Alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl}\}$ |

Sie geben Teilmengen der reellen Zahlen mithilfe von Mengensymbolen,

$\in$  'gehört zu'  $\notin$  'gehört nicht zu'

durch Ungleichungen sowie in Intervallschreibweise an.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \quad [a; b[ = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \quad ]a; b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

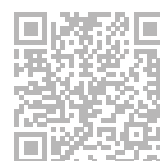
$X^*$ : Alle Elemente von  $X$  außer 0

$X_+$ : Alle positiven Elemente von  $X$

$X_-$ : Alle negativen Elemente von  $X$

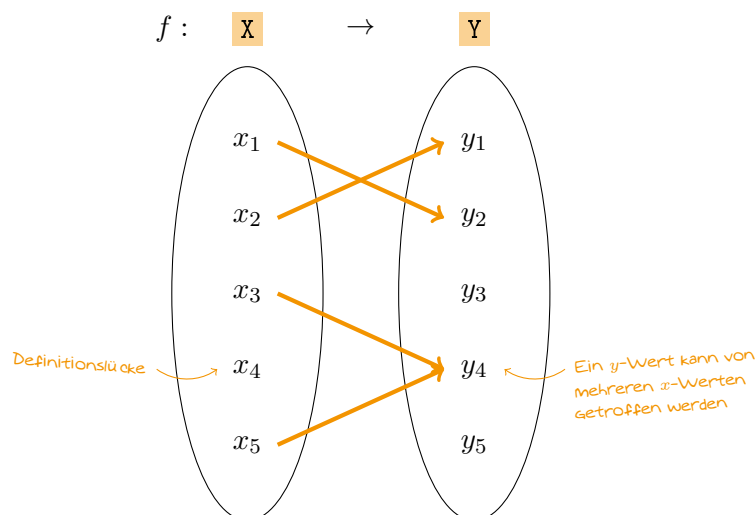
$X_+^0$ : Alle nichtnegativen Elemente von  $X$

$X_-^0$ : Alle nichtpositiven Elemente von  $X$



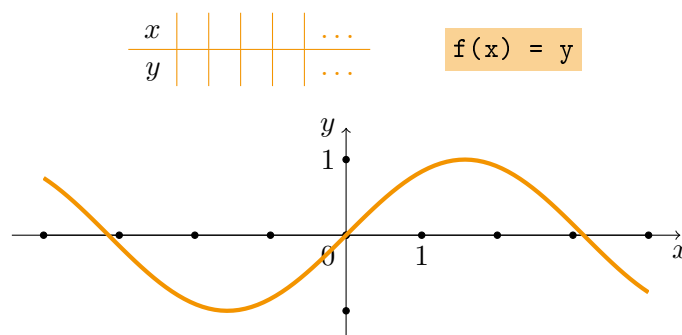
## 2 Sicherung Funktionierung

Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Funktionsbegriff an Beispielen aus dem Alltag. Sie entscheiden, ob eine gegebene **Zuordnung** eindeutig oder nicht eindeutig ist. Darüber hinaus erläutern sie die Begriffe **Definitionsbereich**, Definitionslücke und **Wertebereich** und ermitteln den Definitions- und den Wertebereich einer grafisch, algebraisch oder verbal gegebenen Funktion, auch im Kontext einer Anwendungssituation.

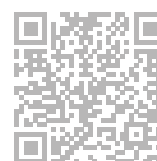


## 3 Sicherung Darstellung

Die Schülerinnen und Schüler geben Funktionen durch **Tabellen**, **Gleichungen**, **Funktionsgraphen**



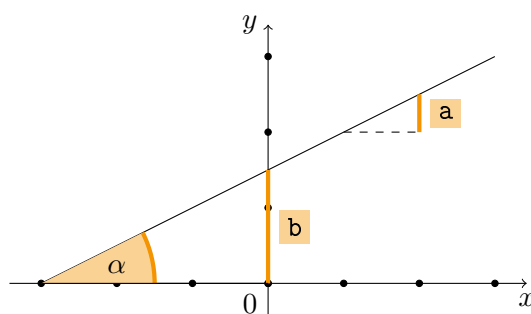
oder Texte an, wechseln zwischen den Darstellungsformen und bewerten diese im jeweiligen Kontext. Sie identifizieren abhängige und unabhängige Variablen, beschreiben deren Zusammenhang und nennen charakteristische Wertepaare. Sie erläutern Zusammenhänge zwischen den Funktionsdarstellungen unter Verwendung von Fachsprache und mathematischer Symbolschreibweise.



## 4 Sicherung Geradung

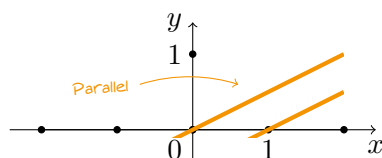
Die Schülerinnen und Schüler deuten Geraden als Graphen

linearer Funktionen. Sie geben die Gleichungen besonderer Geraden an und begründen, dass eine Parallele zur  $y$ -Achse nicht Graph einer Funktion ist. Sie berechnen den Steigungswinkel einer Geraden und deuten ihn grafisch. Sie interpretieren lineare Ungleichungen geometrisch und ermitteln die Lösungsmengen mit Äquivalenzumformungen.



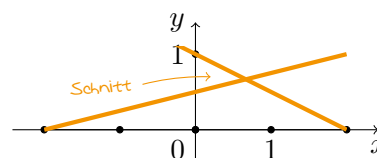
$$f(x) = a \cdot x + b; \quad \tan(\alpha) = a$$

Ebenso untersuchen die Schülerinnen und Schüler die Lagebeziehung zweier Geraden anhand ihrer Gleichungen und der Orthogonalitätsbedingung.



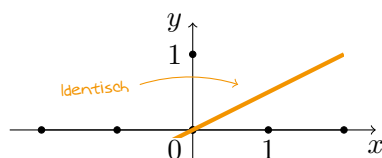
$$y = a \cdot x + b$$

$$y = a \cdot x + c \quad b \neq c$$



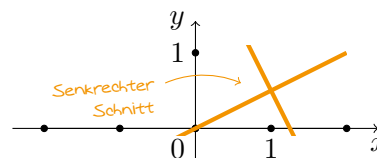
$$y = a \cdot x + b$$

$$y = c \cdot x + d \quad a \neq c$$



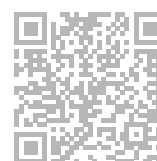
$$y = a \cdot x + b$$

$$y = a \cdot x + b$$



$$y = a \cdot x + b$$

$$y = -a^{-1} \cdot x + c$$



## 5 Sicherung Potenzrechnung

Die Schülerinnen und Schüler deuten Potenzen mit rationalen Exponenten als Wurzel- oder Bruchausdrücke und wechseln zwischen den Darstellungsformen. Sie erläutern an Beispielen, dass die **Rechengesetze** für das Multiplizieren, das Dividieren und das Potenzieren von Potenzen auch für rationale Exponenten gelten und wenden diese Rechengesetze an.

•

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

•

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

•

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$

•

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

•

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

•

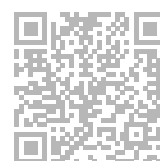
$$x^0 = 1$$

•

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

•

$$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$



## 6 Übung Zahlbereichserweiterung

6.0 Benenne die vier Zahlenmengen und notiere sie im Kreisdiagramm:

Q; Z; N; R

Notiere die Zahlen möglichst weit innen im Kreisdiagramm:

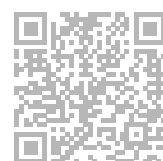
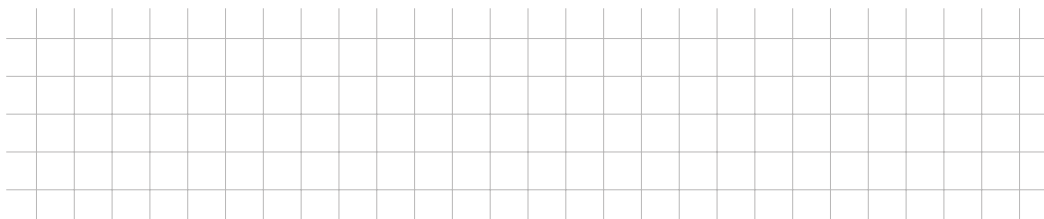
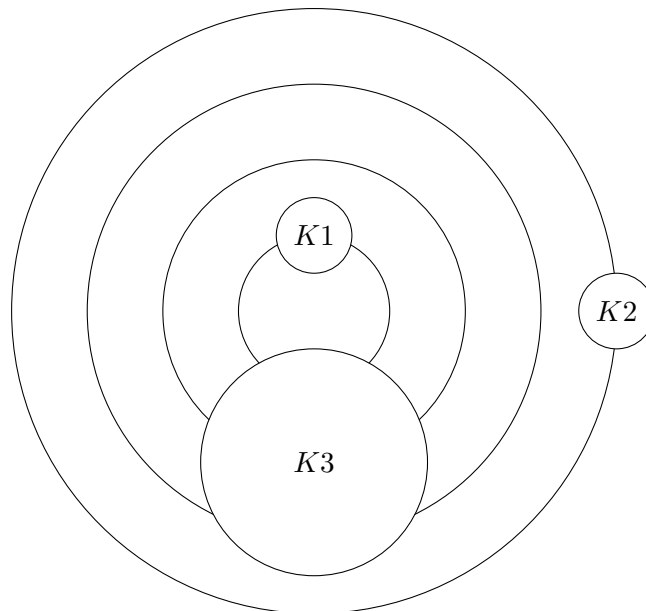
$$-4; 42; \frac{3}{2}; \sqrt{10}; -(-1); 42,1; \frac{42}{14}; \sqrt{100}$$

Entscheide, welche Menge zu welchem Kreis K1, K2 und K3 gehört.

$$A = \{3; -3; 0\}$$

$$B = \{\sqrt{-3}; \pi\}$$

$$C = \{1; -1; 0,5; \sqrt{5}\}$$



6.1 Gib die angegebene Menge für  $x \in \mathbb{R}$  jeweils in Intervallschreibweise an.

6.1.0

$$3 < x < 7$$

6.1.1

$$-4 \leq x \leq 5$$

6.1.2

$$0 < x \leq 16$$

6.1.3

$$73 \leq x < 99$$

6.1.4

$$\mathbb{R}_+$$

6.1.5

$$\mathbb{R}_-$$

6.1.6

$$2 < x \leq 42$$

6.1.7

$$23 \leq x < 100$$

6.1.8

$$1 < x < 6$$

6.1.9

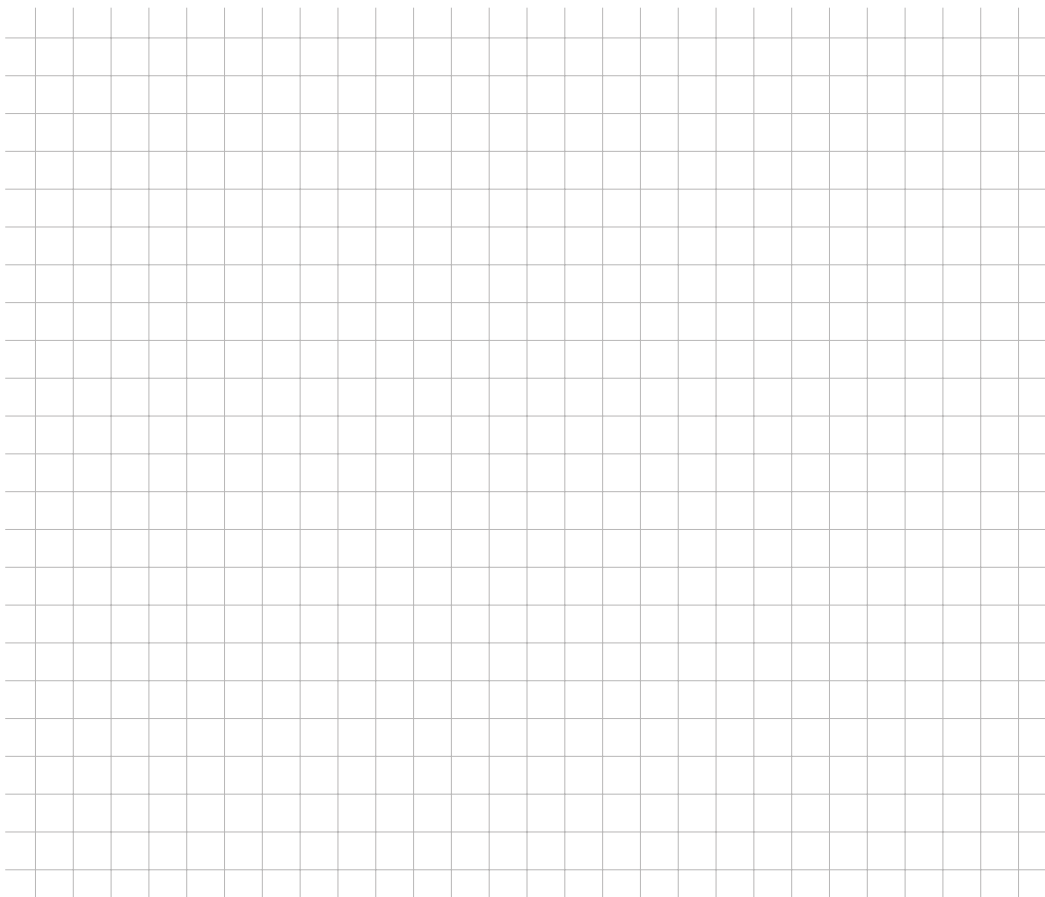
$$2 \leq x \leq 4$$

6.1.10

$$\mathbb{R}_+^0$$

6.1.11

$$\mathbb{R}_-^0$$



6.2 Untersuche jeweils rechnerisch den Wahrheitsgehalt der Aussage.

6.2.0

$$(3 \cdot 14 - 6 \cdot 7 + 1 \cdot 42 - 3 \cdot 14 + 2 \cdot 21) \in \mathbb{N}$$

6.2.1

$$(\sqrt{100} - \sqrt{400} - \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{25}) \in \mathbb{Z}$$

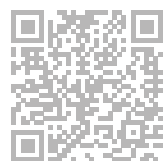
6.2.2

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{22}{42}\right) \notin \mathbb{Q}$$

6.2.3

$$\left(\sqrt{\frac{6 + 6 \cdot 6}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{\frac{1}{42}} - \frac{0}{\pi}}}\right) \notin \mathbb{R}$$

Wer hier seinen  
Taschenrechner  
benutzt, der macht  
so viele  
Liegestütze wie es  
natürliche Zahlen  
gibt.



6.3 Besondere natürliche Zahlen sind die Primzahlen. Eine Zahl  $p \in \mathbb{N}$  ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn gilt:

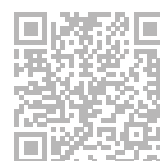
$p$  hat genau zwei Teiler

Besondere natürliche Zahlen sind die Quadratzahlen. Eine Zahl  $a \in \mathbb{N}$  ist dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn es eine weitere Zahl  $b \in \mathbb{N}$  gibt, sodass gilt:

$$a = b \cdot b$$

Gib jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

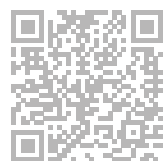
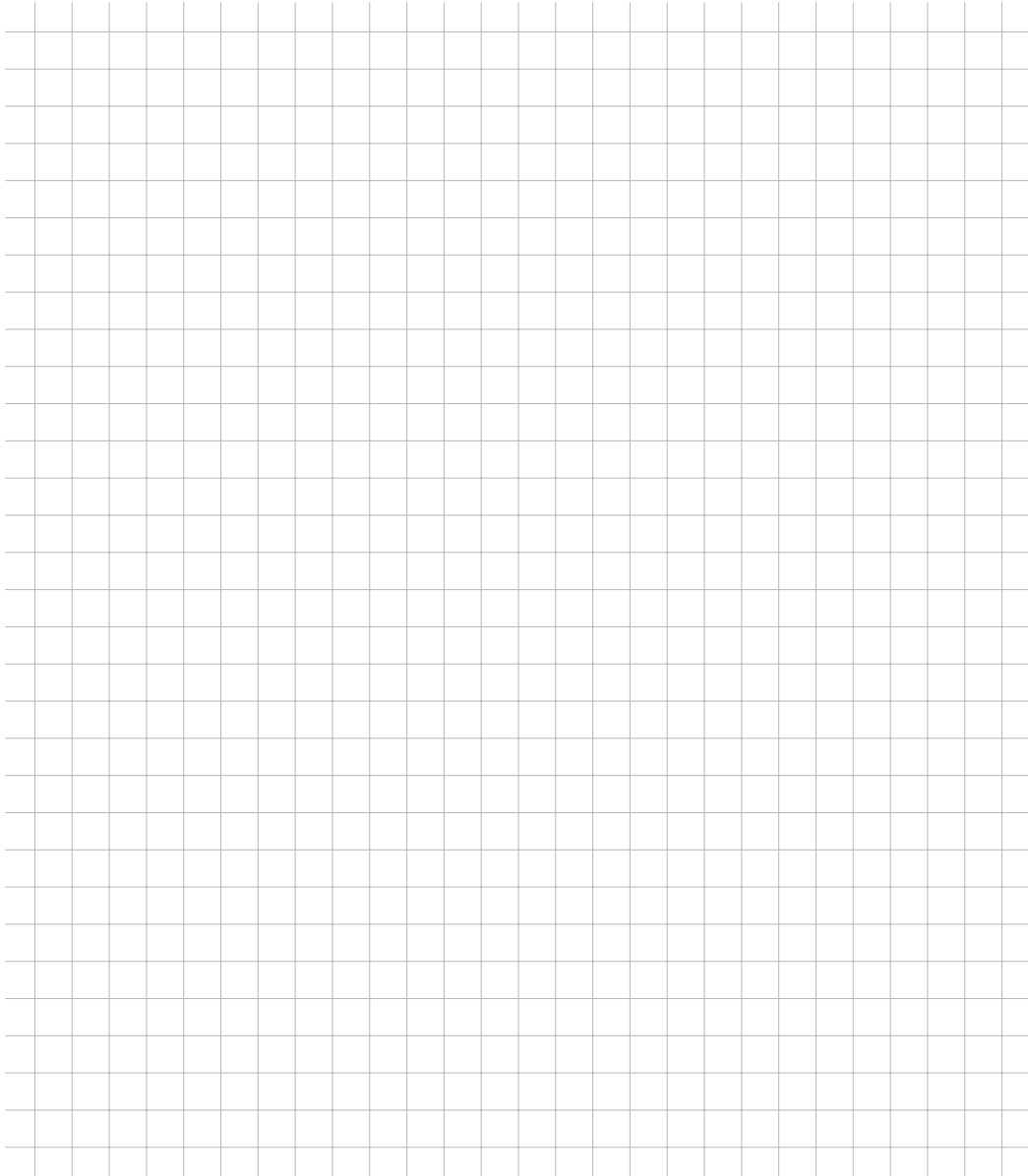
- 6.3.0 Die kleinste Primzahl ist 1.
- 6.3.1 91 ist eine Primzahl.
- 6.3.2 Es gibt keine Primzahl, die größer als 400 ist.
- 6.3.3 Es gibt keine Möglichkeit, die Zahl 42 als Produkt von ausschließlich Primzahlen zu schreiben.
- 6.3.4  $-100$  ist eine Quadratzahl.
- 6.3.5 125 ist eine Quadratzahl.
- 6.3.6 Mathe liebsch.
- 6.3.7 Es gibt keine dreistellige Quadratzahl, die durch 100 teilbar ist.
- 6.3.8 Es gibt keine Quadratzahl, die eine Primzahl ist.
- 6.3.9 Gilt  $p \cdot p = a$ , dann hat  $a$  keine weiteren Teiler außer  $p$ , wenn  $p$  Primzahl ist.
- 6.3.10 Der Quotient zweier unterschiedlicher Primzahlen ist nie natürlich.



- 6.4 Der Elefant will eine quadratische Pizza mit einem Flächeninhalt von 2 Flächeneinheiten backen. Untersuche, ob er für die Seitenlängen der Pizza eine rationale Zahl  $q$  nehmen kann. Eine rationale Zahl  $q$  ist eine Zahl, für die es zwei Zahlen  $a; b \in \mathbb{Z}$  gibt, sodass gilt:

$$q = \frac{a}{b}$$

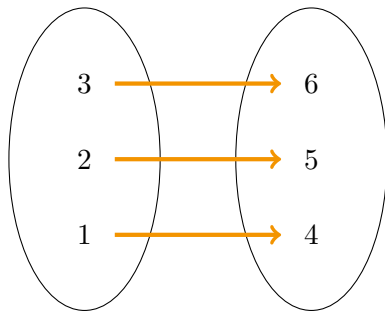
Wobei  $a$  und  $b$  teilerfremd sind und es gilt:  $b \neq 0$ .



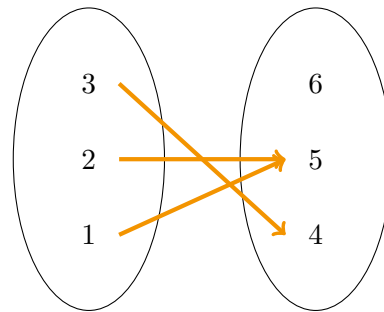
## 7 Übung Funktionierung

7.0 Gib jeweils an, ob es sich bei der **Abbildung** um eine Funktion handelt.

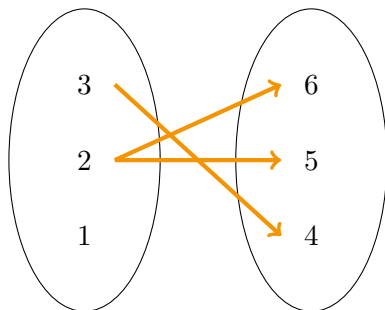
$a: M \rightarrow N$



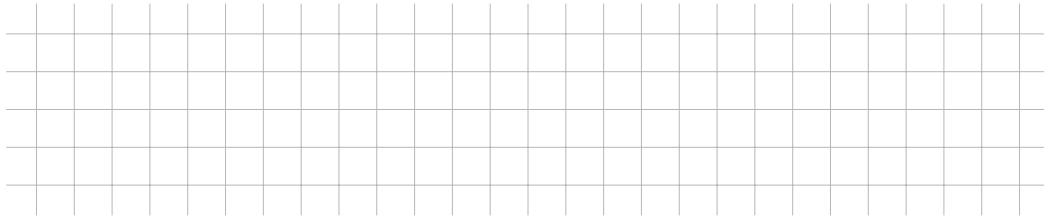
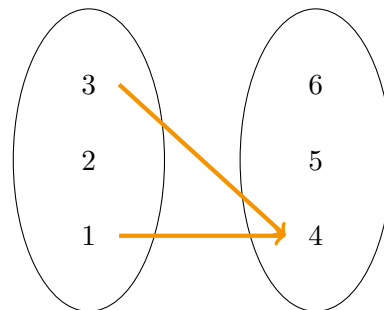
$b: M \rightarrow N$



$c: M \rightarrow N$



$d: M \rightarrow N$



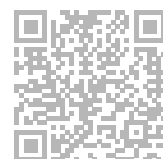
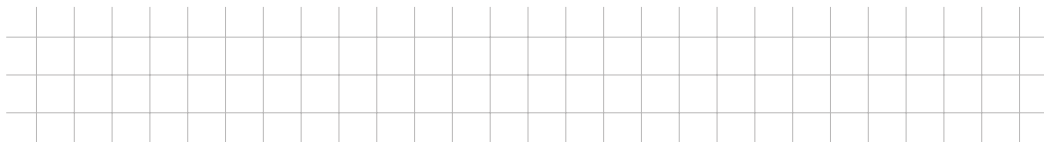
7.1 Gib jeweils an, ob es sich um eine Funktion handelt.

7.1.0 Jedem Schüler wird sein Geburtsdatum zugeordnet.

7.1.1 Jedem Lehrer werden die Fächer (die er selbst unterrichtet) zugeordnet.

7.1.2 Jedem Schüler wird sein Notendurchschnitt zugeordnet.

7.1.3 Jeder Schachfigur werden ihre Startpositionen zugeordnet.



7.2 Gib jeweils den maximalen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich der Funktion an.

$$a(x) = x$$

$$c(x) = x^2$$

$$e(x) = x^{-1}$$

$$b(x) = 2x + 3$$

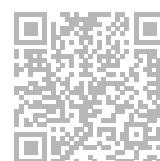
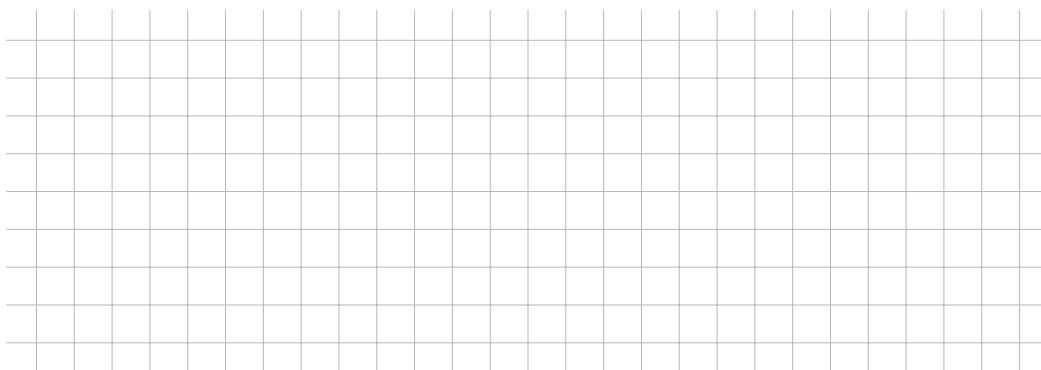
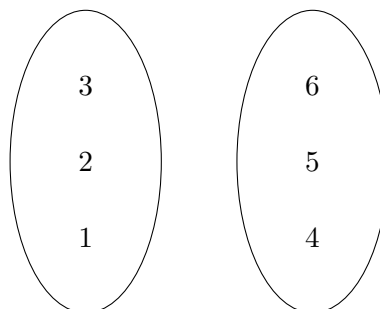
$$d(x) = x^2 + 5$$

$$f(x) = \sqrt{2x - 1}$$



7.3 Besondere Funktionen sind die bijektiven Funktionen, bei dem nicht nur jeder  $x$ -Wert höchstens einen  $y$ -Wert bekommt, sondern auch jeder  $y$ -Wert höchstens einen  $x$ -Wert bekommt. Untersuche, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Menge  $M$  bijektiv auf die Menge  $N$  abzubilden.

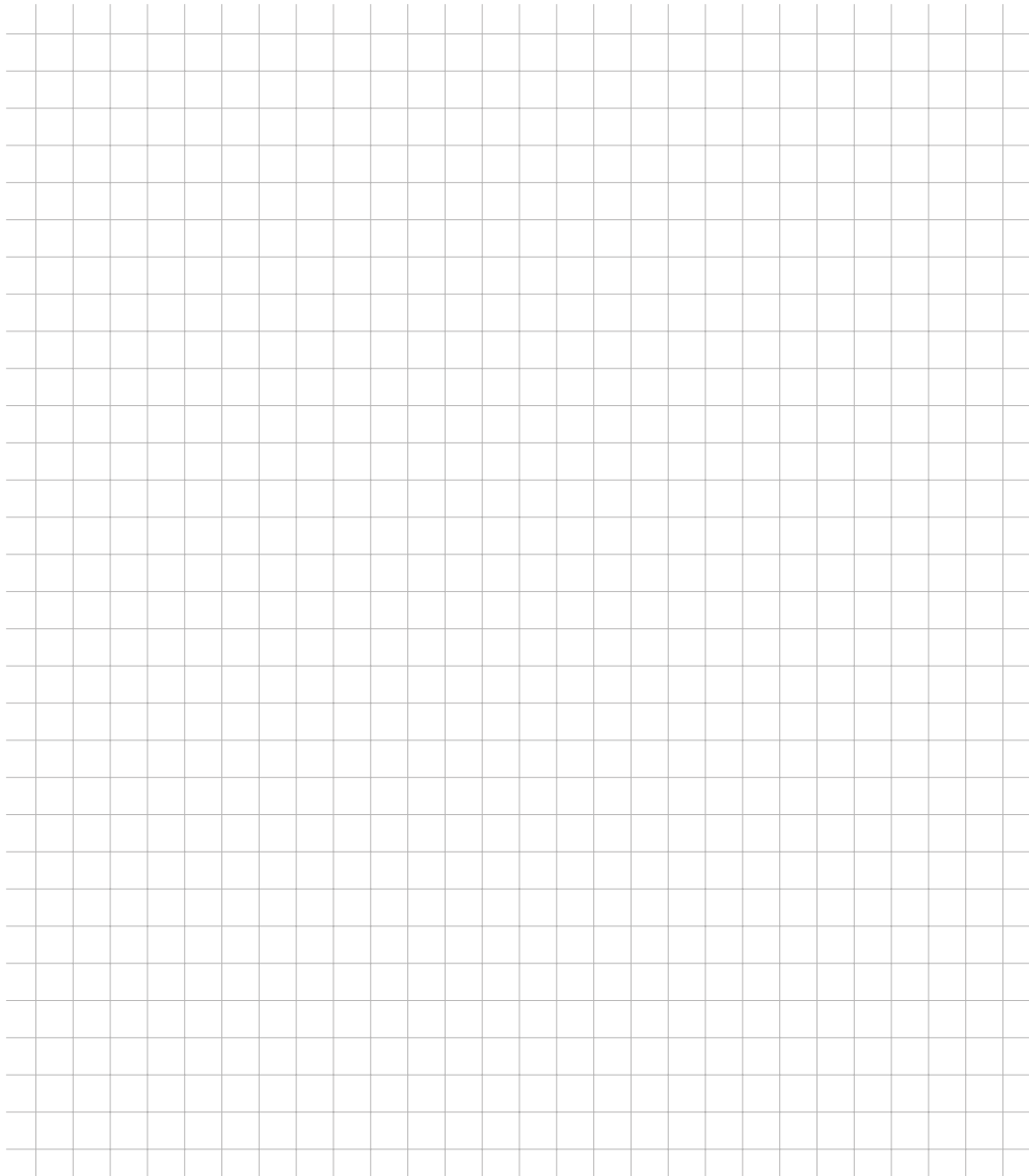
$$f: M \rightarrow N$$



7.4 Der Rand einer Pizza wird durch die Funktionsgraphen von  $f$  und  $g$  modelliert durch:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

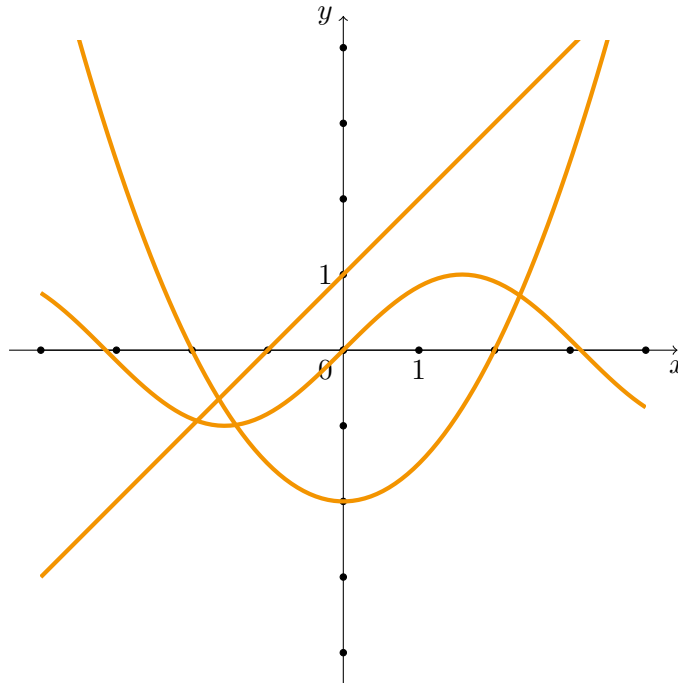
Skizziere das Schaubild der Funktion für  $r = 3$ . Untersuche, welche geometrische Form durch die Abbildung  $f$  für  $r \in \mathbb{R}$  beschrieben wird. Erläutere, warum sich der Pizzarand nicht nur durch eine Funktion darstellen lässt.



## 8 Übung Darstellung

8.0 Gib jeweils an, welche der Darstellungsformen dieselbe Funktion beschreiben:

- **Schaubilder:**



- Wertetabellen:

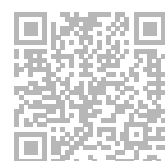
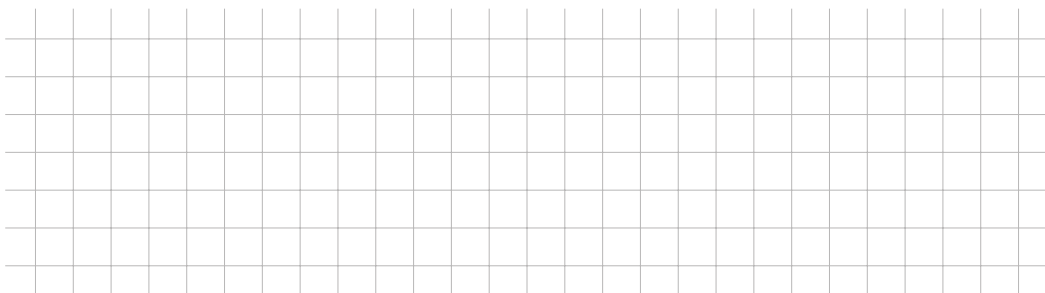
|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | 1 | 2 | 3 |

|     |    |      |   |
|-----|----|------|---|
| $x$ | 0  | 1    | 2 |
| $y$ | -2 | -1,5 |   |

|     |   |                 |       |
|-----|---|-----------------|-------|
| $x$ | 0 | $0,5 \cdot \pi$ | $\pi$ |
| $y$ | 0 | 1               | 0     |

- Funktionsgleichungen:

$$a(x) = x + 1; \quad b(x) = 0,5 \cdot x^2 - 2; \quad c(x) = \sin(x)$$

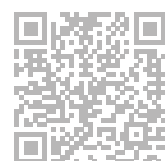
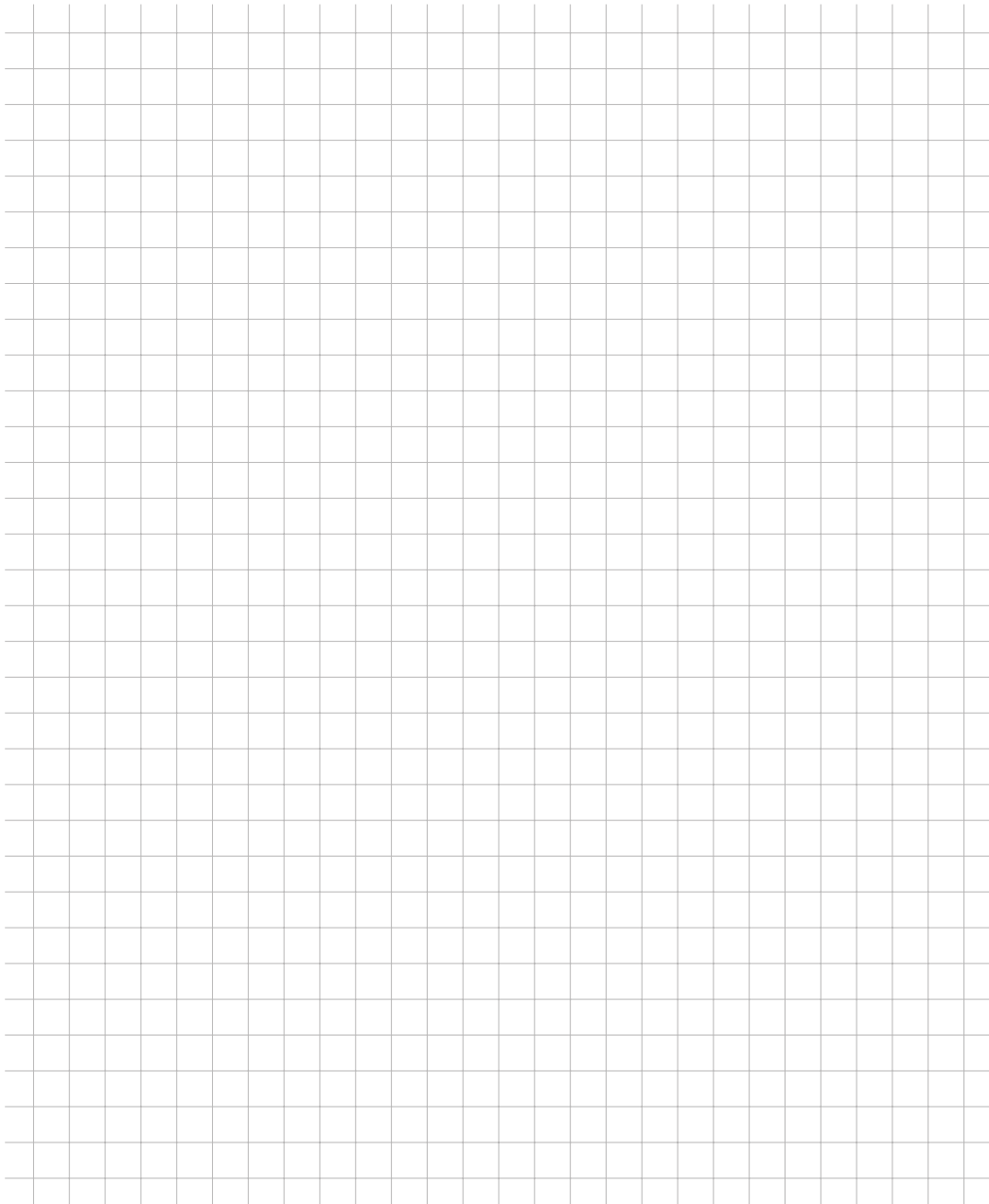


8.1 Skizziere jeweils das Schaubild der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem mit  $0 \leq x \leq 7$ .

Gegebenenfalls  
Wertetabelle  
erstellen!

$$a(x) = 0,5 \cdot x + 1; \quad b(x) = 0,125(x - 4)^2 + 1$$

$$c(x) = 0,1 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 5)$$



8.2 Gib zur Wertetabelle jeweils eine mögliche Funktionsgleichung und zu den Schaubildern jeweils eine mögliche Wertetabelle an für  $x \in \{-2; 0; 1; 4\}$ .

Taschenrechner  
erlaubt!

| $x$    | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|---|
| $a(x)$ | 1 | 2 | 3 |

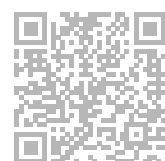
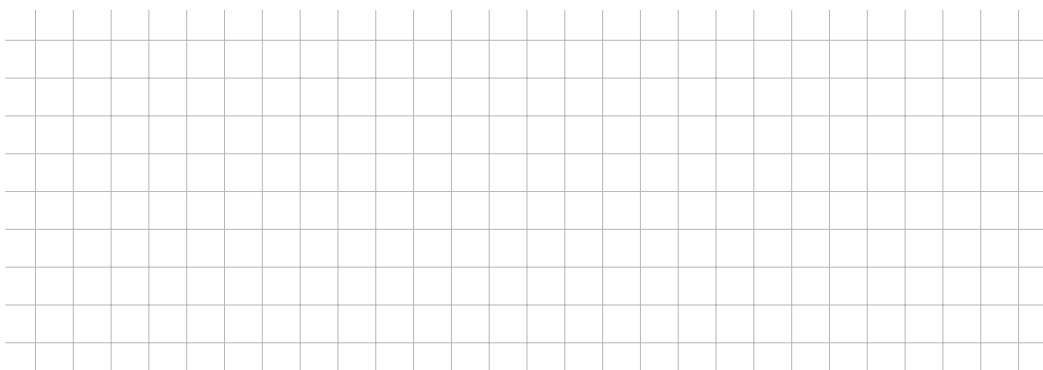
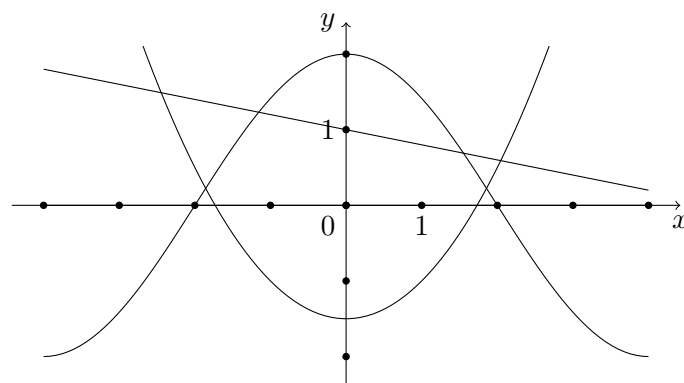
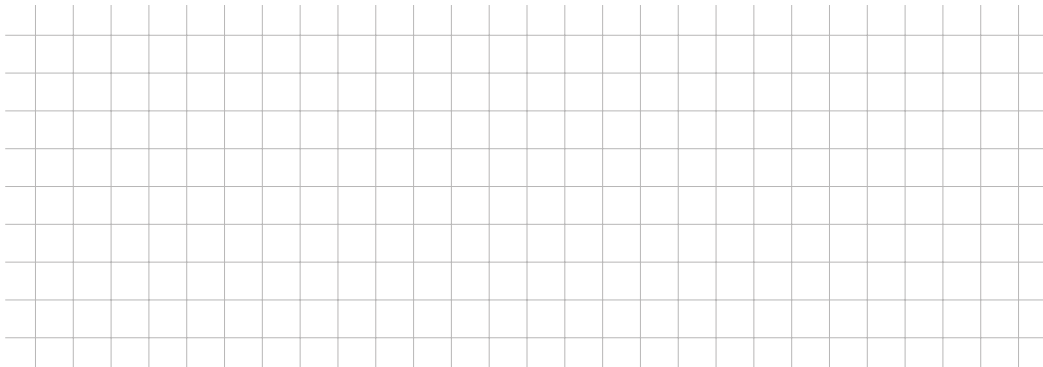
| $x$    | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|---|
| $b(x)$ | 3 | 5 | 7 |

| $x$    | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|---|---|
| $c(x)$ | 1 | 4 | 9 |

| $x$    | 1  | 2 | 3  |
|--------|----|---|----|
| $d(x)$ | -1 | 1 | -1 |

| $x$    | 1 | 2  | 3 |
|--------|---|----|---|
| $e(x)$ | 1 | -4 | 9 |

| $x$    | 1  | 2 | 3  |
|--------|----|---|----|
| $f(x)$ | -1 | 2 | -6 |



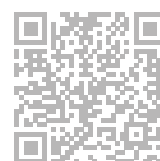
8.3 Ermittle die Funktionsgleichung einer Funktion, für die beiden Aussagen gleichzeitig gelten:

- Für den Definitionsbereich  $D_1 = [1;3]$  ist  $P(2|2)$  der höchste Punkt des Schaubildes
- Für den Definitionsbereich  $D_2 = \mathbb{R}$  ist  $P(2|2)$  nicht der höchste Punkt des Schaubildes.



8.4 Der Elefant beobachtet das Volumen seines Pizzateiges  $p$  beim Gehen ( $t$  in Minuten). Ermittle eine passende Funktionsgleichung, wenn gilt:

|        |   |     |     |
|--------|---|-----|-----|
| $t$    | 0 | 1   | 2   |
| $p(t)$ | 1 | 2,1 | 3,8 |



## 9 Übung Geradung

9.0 Gib jeweils die Lagebeziehung des **Geradenpaares** an und gib an, zu welchem Schaubild das Paar jeweils gehört.

$$a_1(x) = -0,1 \cdot x + 0,3$$

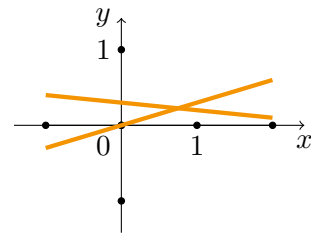
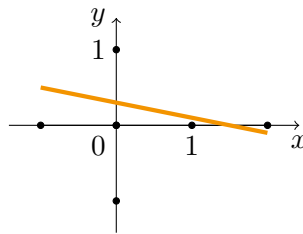
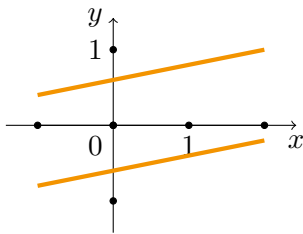
$$a_2(x) = 0,3 \cdot x$$

$$b_1(x) = 0,2 \cdot x + 0,6$$

$$b_2(x) = 0,2 \cdot x - 0,6$$

$$c_1(x) = -0,2 \cdot x + 0,3$$

$$c_2(x) = -0,2 \cdot x + 0,3$$



9.1 Skizziere die zu den Funktionsgleichungen zugehörigen Geradenpaare jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem mit  $-3 \leq x \leq 3$ . Gib ihre Lagebeziehung an und überprüfe deine Aussage mithilfe der Funktionsgleichungen.

$$a_1(x) = 1 \cdot x + 1$$

$$a_2(x) = 1 \cdot x + 3$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$$

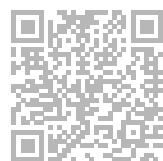
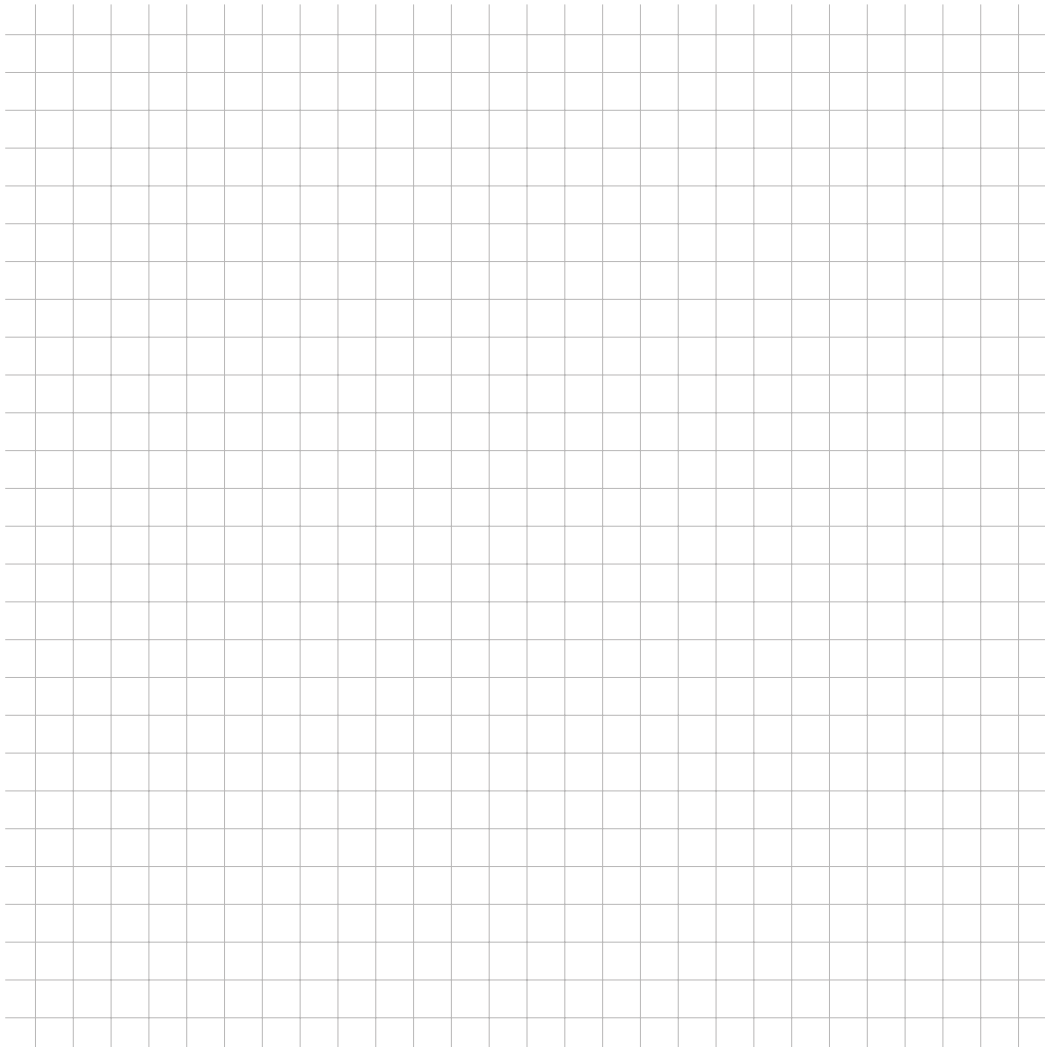
$$c_2(x) = 2 \cdot x - 1$$

$$b_1(x) = x + x$$

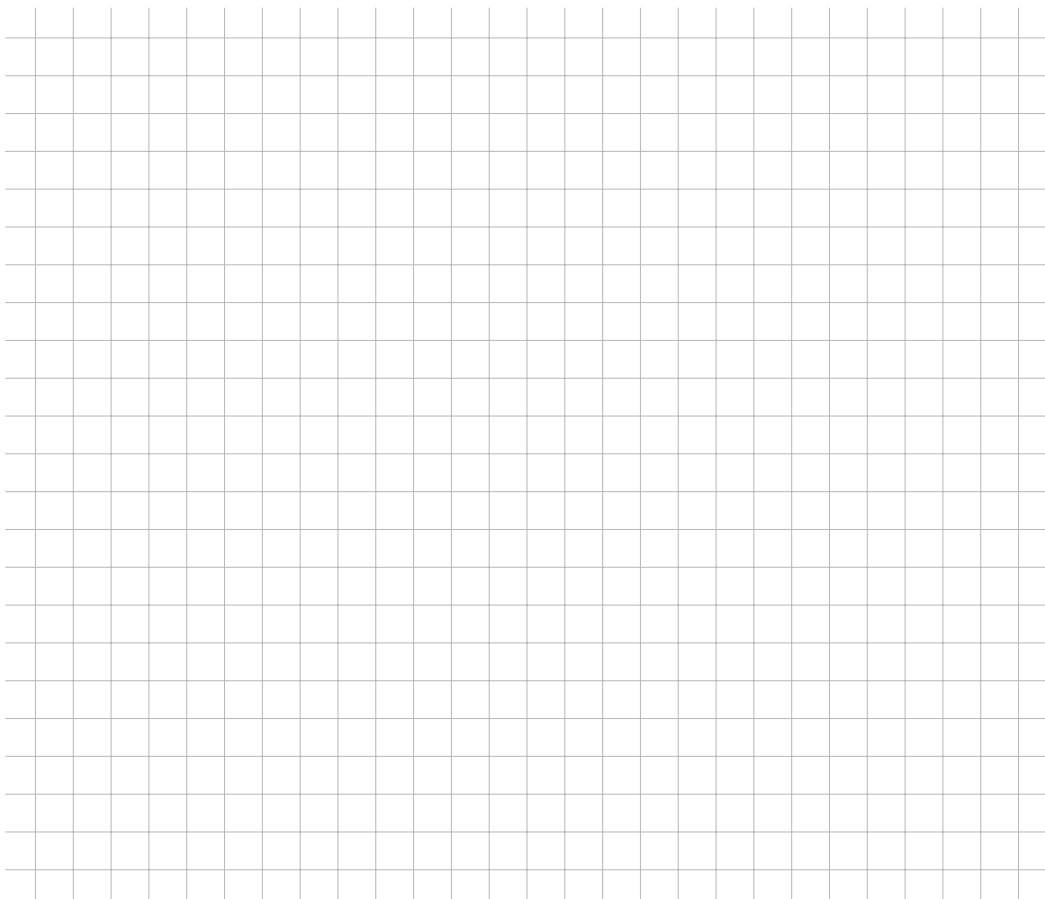
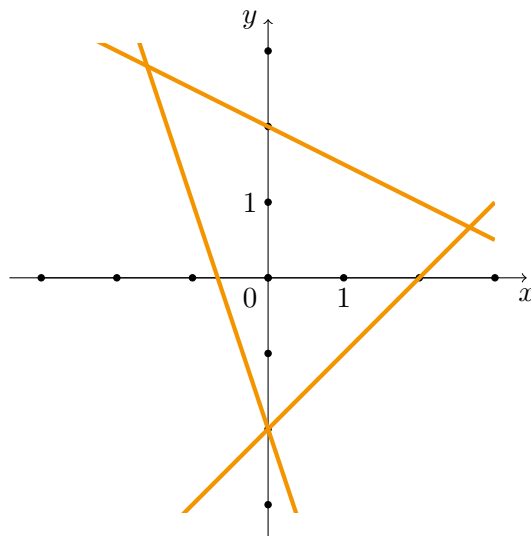
$$b_2(x) = 2 \cdot x$$

$$d_1(x) = -\frac{1}{3} \cdot x + 4$$

$$d_2(x) = 3 - \frac{1}{3} \cdot x$$



9.2 Ermittle zu den Schaubildern jeweils den passenden Funktionsterm einer linearen Funktion. Berechne alle Schnittpunkte.



9.3 Gegeben sind die linearen Funktionen  $a$  und  $b$  mit:

$$a(x) = \frac{2}{1} \cdot x - 1; \quad b(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 3$$

Skizziere die zu den Funktionsgleichungen zugehörigen Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem mit  $0 \leq x \leq 5$ . Ermittle ihren Schnittwinkel und untersuche zeichnerisch, was für die Steigungen zweier Geraden gelten muss, damit sie sich in einem rechten Winkel schneiden.



9.4 Der Elefant hat nach drei Wochen noch 585 Pizzas. Nach sieben Wochen sind es noch 525. Ermittle eine lineare Funktion, die den Pizzabestand modelliert und berechne, wann der GAU eintritt.



## 10 Übung Potenzrechnung

10.0 Gib jeweils das Potenzgesetz an.

$$x^{\frac{n}{m}} \quad x^m \cdot x^n \quad x^{-n} \quad \frac{x^m}{x^n} \quad x^0 \quad x^n \cdot y^n \quad (x^m)^n \quad \frac{x^n}{y^n}$$



10.1 Vereinfache so weit wie möglich.

$$2^0 + \frac{2^3}{2^4} + 2^2 \cdot 2^{-2} + \sqrt[2]{2^2} + \frac{1}{2^{-1}}$$



10.2 Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{\frac{x^4+49 \cdot x^2}{x}}}{\sqrt{x}}$$

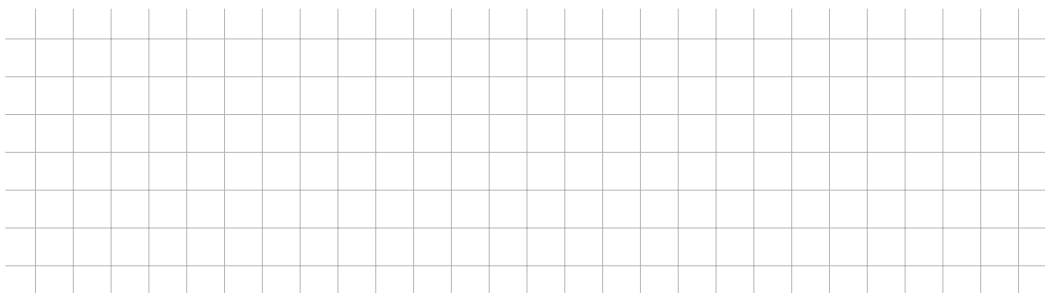


10.3 Zeige mit Hilfe der Potenzgesetze, dass für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$



10.4 Der Elefant isst seinen tiefgekühlten Pizzavorrat leer. Zu Beginn hat er 43008 Pizzas. Jeden Tag isst er die Hälfte davon. Berechne, wie viele Pizzas er nach 10 Tagen noch hat.



11.0 Ermittle rechnerisch, zu welchen bekannten Zahlenmengen das Ergebnis gehört.

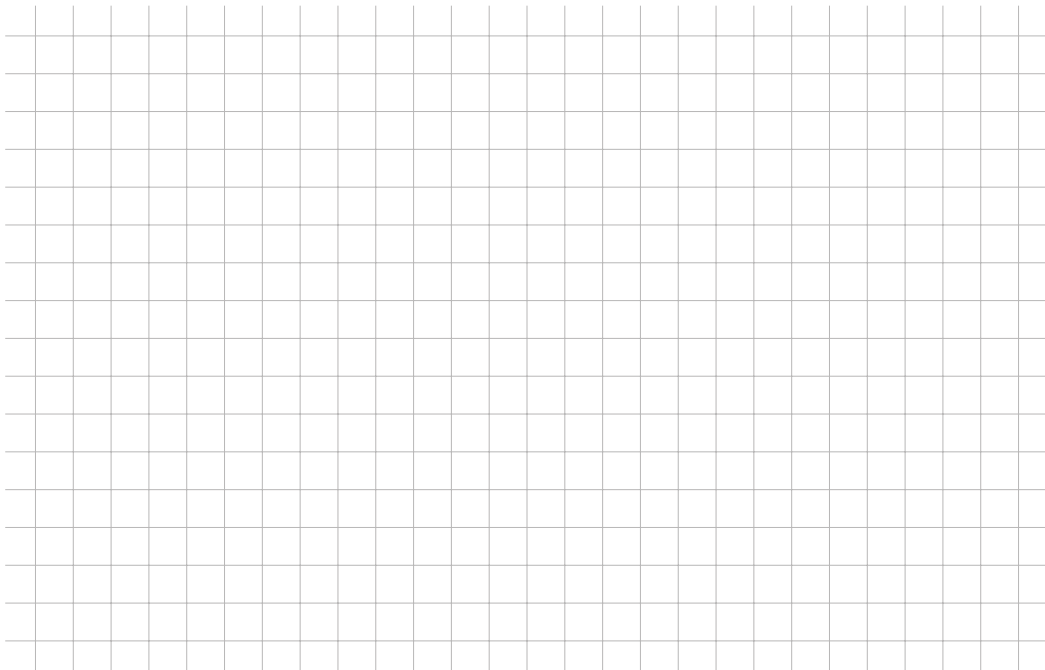
$$\frac{14}{2} - 3,4 + \frac{21}{\sqrt{9}} \cdot 5 + \frac{17}{5} + \frac{0}{\sqrt{\pi}}$$

$$y = 37; \quad x = 42; \quad y = 73 + x; \quad x + y = 2701$$
$$f(x) = x^2 - x - 1680$$


11.3 Berechne den Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $h$ , wenn gilt:

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 28$$

$$h(x) = -\frac{1}{7} \cdot x + 48$$



11.4 Berechne:

$$((3^{-1} \cdot 3^2 + 4)^2 + 2^5 - 3^3) \cdot 8^0$$

