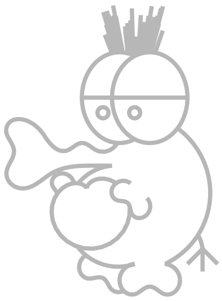
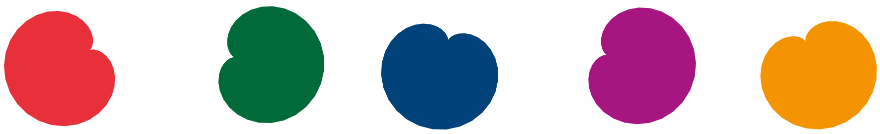
Exposition

Pralinen ~~Mathe~~ liebsch





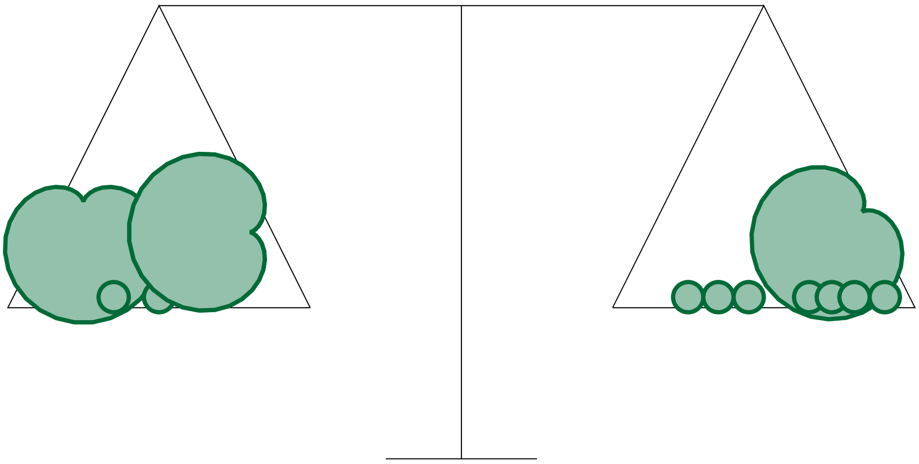
2BFS1.2.Gleichung

Die Schülerinnen und Schüler erkennen ausgehend von geometrischen oder algebraischen Problemen die Notwendigkeit einer Zahlbereichserweiterung. Sie wenden ihre Rechenfertigkeiten auf lineare und quadratische Gleichungen sowie Bruchgleichungen an und stellen Formeln um. Die Schülerinnen und Schüler wählen geeignete Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen und begründen deren Lösbarkeit.

Komplikation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

Ermittle, welche Gleichung zur Waage passt und untersuche damit, wie viele Pralinen sich in einer Pralinenschachtel befinden.



$$x = 5$$

$$2 \cdot x + 2 = x + 7$$

$$2 \cdot x = x + 5$$

1 Wurzeln

Wir schreiben Potenzen mit Exponenten n^{-1} für $n \in \mathrm{N}$ und $x \in \mathrm{Q}$ mit dem Wurzelsymbol:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}; \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Da Wurzeln nicht als Bruch darstellbar sind, erweitern sie die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen.

2 Lineare Gleichungen

Wir definieren eine Gleichung als lineare Gleichung, wenn wir sie für $a;\ b \in \mathrm{R}$ auf die Form bringen können:

$$a \cdot x + b = 0$$

Wir lösen lineare Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen, indem wir beidseitig mit dem Gegenrechenzeichen (Addition wird zu Subtraktion und Multiplikation wird zu Division) die Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} a \cdot x + b &= 0 \\ a \cdot x &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

3 Bruchgleichungen

Wir definieren eine Gleichung als Bruchgleichungen, wenn wir sie für $a;\ b;\ c \in \mathrm{R}$ auf die Form bringen können:

$$\frac{a}{x+b} = c$$

Wir lösen Bruchgleichungen, indem wir mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren und verhindern eine Nulldivision mit Hilfe der Definitionsmenge D:

$$D = \mathrm{R} \setminus \{\texttt{Nullstellen der Nenner}\}$$

4 Quadratische Gleichungen

Wir definieren eine Gleichung als quadratische Gleichung, wenn wir sie für a; b; $c \in \mathrm{R}$; $a \neq 0$ auf die Form bringen können:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Wir verwenden verschiedene Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen:

- $b = 0$: **Äquivalenzumformungen**

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 + c &= 0 \\ a \cdot x^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \\ x_{1;2} &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

- $c = 0$: **Satz vom Nullprodukt**

$$\begin{aligned} a \cdot x^2 + b \cdot x &= 0 \\ x \cdot (a \cdot x + b) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ a \cdot x + b &= 0 \\ a \cdot x &= -b \\ x_2 &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

  Der Satz vom Nullprodukt besagt, dass ein Produkt dann und nur dann Null wird, wenn mindestens einer der Faktoren Null wird.

- Sonst: **Mitternachtsformel**

Die Mitternachts-formel ist immer ein effektives Lösungsverfahren!

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Quadratische Gleichungen können keine, eine oder zwei Lösungen haben.

1 Wurzeln

1.0 Gib an, welche Wurzeln zu welchem Wert gehören.

$\sqrt{49}$	3
$\sqrt[3]{27}$	6
$\sqrt{36}$	11
$\sqrt{100}$	10
$\sqrt{25}$	9
$\sqrt{121}$	12
$\sqrt{64}$	8
$\sqrt{81}$	7
$\sqrt{144}$	4
$\sqrt{16}$	5

1.1 Gib jeweils so weit wie möglich vereinfacht an.

1.1.1 $\sqrt{4}$
1.1.2 $\sqrt{9}$
1.1.3 $\sqrt{12}$
1.1.4 $\sqrt{42}$
1.1.5 $\sqrt{2}$
1.1.6 $\sqrt{37}$

1.2 Gib jeweils so weit wie möglich vereinfacht an.

1.2.1 $\sqrt{40+9}$

1.2.2 $\sqrt{11-2}$

1.2.3 $\sqrt{16+8}$

1.2.4 $\sqrt{42-2}$

1.2.5 $\sqrt{10+3}$

1.2.6 $\sqrt{80-7}$

1.3 Gib jeweils so weit wie möglich vereinfacht an.

1.3.1 $\sqrt{8^2-4\cdot 0,5\cdot 8}$

1.3.2 $\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}$

1.3.3 $\sqrt{3^2-4\cdot 0,25\cdot 9}$

1.3.4 $\sqrt{8^2-4\cdot 0,5\cdot 8}$

1.3.5 $\sqrt{3^2-4\cdot 4\cdot 4}$

1.3.6 $\sqrt{12^2-4\cdot 5\cdot 9}$

1.4 Zeige, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als rationale Zahl darstellen lässt.

2 Lineare Gleichungen

2.0 Gib an, welche Gleichung zu welcher Lösung gehört.

$2 \cdot x + 1 = 3$	10
$x + 3 = 5$	9
$x + x + x = 9$	8
$4 + x = 8$	7
$3 \cdot x - 6 = 9$	6
$6 - x = 0$	5
$6 \cdot x = 42$	4
$7 \cdot x + 1 = 57$	3
$2 \cdot x - 10 = 8$	2
$0,5 \cdot x + 3 = 8$	1

2.1 Berechne jeweils die Lösung der Gleichung.

2.1.1 $2 \cdot x = 4$

2.1.2 $x + 5 = 12$

2.1.3 $x : 5 = 7$

2.1.4 $42 - x = 0$

2.2 Berechne jeweils die Lösung der Gleichung.

- **2.2.1** $3 \cdot x + 2 = 12$
- **2.2.2** $-4 \cdot x + 5 = 9$
- **2.2.3** $2 \cdot x + 5 = 9$
- **2.2.4** $-1 \cdot x + 7 = 4$
- **2.2.5** $5 \cdot x - 8 = 3$
- **2.2.6** $-3 \cdot x - 7 = 10$
- **2.2.7** $2 \cdot x - 6 = 2$
- **2.2.8** $-7 \cdot x - 3 = 11$

2.3 Berechne jeweils die Lösung der Gleichung.

2.3.1 $4 \cdot (x+4) = 12 - x$

2.3.2 $5 \cdot (x-3) = x + 8$

2.3.3 $2 \cdot (x+1) = -(x+3)$

2.3.4 $-3 \cdot (-2 \cdot x + 1) = 2 \cdot (x+7)$

2.4 Ermittle jeweils die Lösungen des Gleichungssystems.

2.4.1

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + y &= 5 \\ 4 \cdot x - 3 \cdot y &= 5 \end{aligned}$$

2.4.2

$$\begin{aligned} x - 3 \cdot y &= 0 \\ 0{,}5 \cdot x &= y + 7 \end{aligned}$$

3 Bruchgleichungen

3.0 Gib an, welche Bruchgleichung zu welcher Definitionsmenge gehört.

$\frac{4}{x-3} = 5$	$D = \mathrm{R} \setminus \{0;\ -2\}$
$\frac{2}{x+1} = 4$	$D = \mathrm{R} \setminus \{1;\ -1\}$
$\frac{3}{x} = \frac{2}{x-4}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{-5\}$
$\frac{7}{x+9} = \frac{7}{5-x}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{0\}$
$5 = \frac{5}{x-5}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{5\}$
$\frac{4}{x} = \frac{7}{x}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{0;\ 4\}$
$5 = \frac{5}{x+5}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{-9;\ 5\}$
$\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+1}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{2}{x} = \frac{3}{2+x}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{3\}$
$\frac{2}{6+x} = \frac{3}{7+x}$	$D = \mathrm{R} \setminus \{-6; -7\}$

3.1 Gib jeweils die Definitionsmenge und die Lösung an.

3.1.1

$$\frac{2}{x} = 4$$

3.1.2

$$\frac{-1}{x} = -9$$

3.1.3

$$\frac{-2}{x} = -4$$

3.2 Gib jeweils die Definitionsmenge und die Lösung an.

3.2.1

$$\frac{2}{x+1} = 4$$

3.2.2

$$\frac{-2}{x-3} = -4$$

3.2.3

$$\frac{-1}{x+5} = -9$$

3.3 Gib jeweils die Definitionsmenge und die Lösung an..

3.3.1

$$\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x+2}$$

3.3.2

$$\frac{-2}{x-3} = \frac{1}{x-5}$$

3.4 Berechne die Lösungen der Gleichung.

$$\frac{2 \cdot x}{x-3} = \frac{x}{x-5}$$

4 Quadratische Gleichungen

4.0 Gib an, welche Gleichung sich mit welchem Verfahren lösen lässt.

$2 \cdot x^2 - 1 = 0$	Mitternachtsformel
$x^2 + 4 \cdot x = 0$	Satz vom Nullprodukt
$2 \cdot x^2 - x - 1 = 0$	Äquivalenzumformung

4.1 Berechne jeweils die Lösungen der Gleichung.

4.1.1

$$2 \cdot x^2 + 1 = 9$$

4.1.2

$$4 \cdot x^2 + 2 = 25$$

4.1.3

$$-3 \cdot x^2 + 4 = 4$$

4.1.4

$$2 \cdot x^2 - 3 = -10$$

4.2 Berechne die Lösungen der Gleichung.

4.2.1

$$2 \cdot x^2 + 3 \cdot x = 0$$

4.2.2

$$x^2 - 4 \cdot x = 0$$

4.3 Berechne die Lösungen der Gleichung.

4.3.1

$$4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$$

4.3.2

$$0,5 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 32 = 0$$

4.4 Berechne die Lösungen der Gleichung.

$$2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 = -1$$

Katastrophe