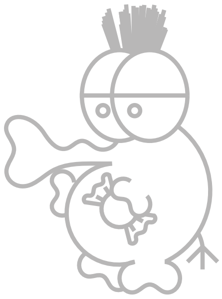
Exposition

Bonbole ~~Mathe~~ liebsch



13.17.Stochastung

In der Stochastik werden Inhalte der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Elementen der beurteilenden Statistik verzahnt. Basierend auf dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff differenzieren die Schülerinnen und Schüler ihr Verständnis von Wahrscheinlichkeit weiter aus, indem sie unterschiedliche Zugänge zum Begriff Wahrscheinlichkeit kennen lernen. In Zufallsexperimenten und Simulationen erleben die Schülerinnen und Schüler das Wesen des Zufalls. Sie erkennen, dass Zufall mit Mitteln der Mathematik quantifizierbar ist. Die Schülerinnen und Schüler werden für die Beurteilung von zufälligen Ereignissen sensibilisiert, um zufällige Alltagssituationen und statistische Aussagen kritisch hinterfragen und bewerten zu können.

Komplikation

Beim Reisen durch die Galaxie braucht man ein Handtuch, weil sich klebrige Bonbons in der Schwerelosigkeit mit einer derartigen Begeisterung an jede verfügbare Oberfläche heften, dass man entweder ein Tuch zum Abwischen hat - oder in wenigen Minuten selbst als interstellarer Karamellplanet gilt. In einer Bonboniere sind jeweils $n \in \mathbb{N}$ rote, grüne, blaue, orangene und lilane Bonbons. Wir ziehen zufällig zwei Mal ein Bonbon aus der Bonboniere. Wir möchten herausfinden, ob man das Bonbon jeweils zurücklegen sollte oder nicht, wenn wir zwei Mal die gleiche Farbe ziehen wollen und ob diese Fragestellung unabhängig von n ist.

1

2 Um den Zufall mit Hilfe der Mathematik zu quantifizieren definieren wir die folgende Begriffe:

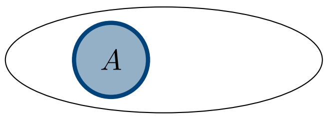
- Zufallsexperiment (mehrstufig)
  Ein (mehrmals hintereinander ausgeführtes) Experiment, dessen Ausgang nicht ausreichend gut vorhersehbar ist.
- Ergebnismenge S
  Menge aller Ergebnisse $a;\ b;\ c;\ \ldots$ einer Zufallsgröße:

$$S = \{a;\ b;\ c;\ \ldots\}$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung P
  Ordnet Ergebnissen gemäß den Kolmogorov-Axiomen ihre Wahrscheinlichkeiten $p \in [0;1]$ zu. Relative Häufigkeiten sind Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten. Wir bezeichnen A mit $P(A) = 1$ als sicheres und B mit $P(B) = 0$ als unmögliches Ereignis. Ein Zufallsexperiment mit gleich wahrscheinlichen Ergebnissen bezeichnen wir als Laplace-Experiment.

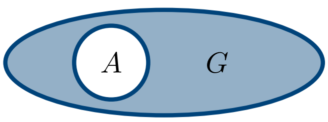
- Ereignis A

$$A \subseteq S$$

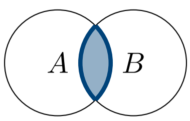


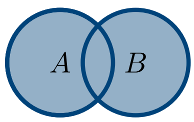
- Gegenereignis G

$$P(A) + P(G) = 1$$



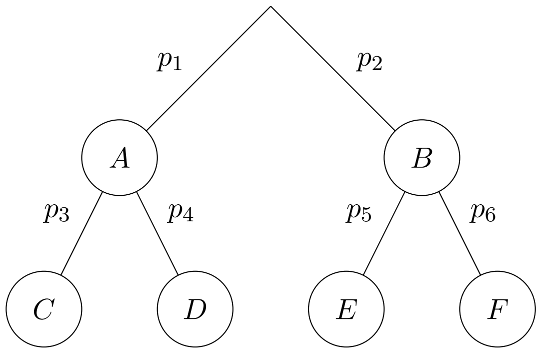
- Verknüpfte Ereignisse

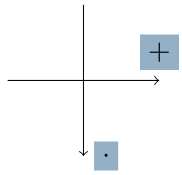
$A \cap B$


$A \cup B$


3 Wir berechnen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Modellen.

- Zur Modellierung von mehrstufigen Zufallsexperimenten benutzen wir ein **Baumdiagramm** in dem wir Ausgänge A; B; C;... und Wahrscheinlichkeiten p_1; p_2; p_3; ... eintragen und Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit Hilfe von **Pfadregeln** berechnen:





- Zur Modellierung von zusammenhängenden Ereignissen A und B erstellen wir eine **Vierfeldertafel** mit den Zeilensummen k und l und den Spaltensummen m und n:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	k
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	l
	m	n	1

Wir berechnen mit der Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B eingetreten ist und prüfen die **Stochastische Unabhängigkeit** durch:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \qquad P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

4 Wir unterscheiden mit k; $n \in \mathbb{N}$ in der **Kombinatorik** drei Fälle für eine n-elementige Menge.

- **Permutation**: Alle möglichen Anordnungen dieser n Elemente. Anzahl der Möglichkeiten:

  Per Definition gilt: $0! = 0$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$

- **Kombination**: Eine Auswahl von $k \leq n$ Elementen, bei der die Reihenfolge nicht relevant ist. Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

- **Variation**: Eine Auswahl aus $k \leq n$ Elementen, bei der die Reihenfolge relevant ist. Anzahl der Möglichkeiten:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

5 Wir definieren weitere Begriffe:

- Wir definieren eine Zufallsgröße als **diskret** (sonst **stetig**), wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.
- Wir definieren eine Funktion P als **Wahrscheinlichkeitsfunktion**, wenn sie jedem möglichen Wert x_i einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zuordnet und auf Werte im Intervall $[0, 1]$ abbildet.
- Wir definieren den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ als den mittleren Wert, der bei sehr vielen Wiederholungen eines Zufallsexperiments zu erwarten ist. Es gilt:

$$\mathrm{E}(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

- Wir sprechen von einem **fairen Spiel**, wenn gilt für X : Gewinn gilt:

$$\mathrm{E}(X) = 0$$

- Wir berechnen die **Varianz**, um die Streuung der Werte um den Erwartungswert zu beschreiben:

$$\mathrm{Var}(X) = (x_1 - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x_n)$$

- Wir definieren die **Standardabweichung** als durchschnittliche Abweichung der Werte vom Erwartungswert:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

6

7

8 Wir definieren eine Zufallsgröße als binomialverteilt, wenn sie eine aufeinanderfolgendes (Bernoullikette) Bernoulliexperiment modelliert. Das bedeutet

- Es gibt nur zwei mögliche Ausgänge.
- Die Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich.

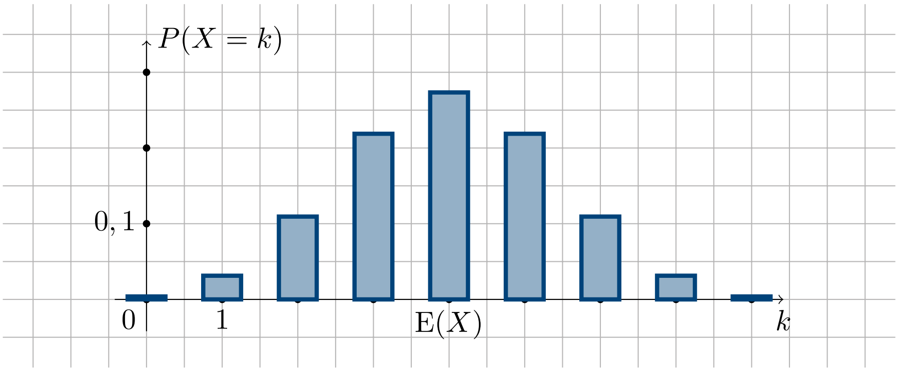
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgröße, die die Anzahl der Treffer k zählt, bei n Durchführungen und der Trefferwahrscheinlichkeit p durch:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Somit gilt für die kumulierte Wahrscheinlichkeit:

$$P(l \leq X \leq m) = P(X = l) + P(X = l + 1) + \ldots + P(X = m)$$

Wir stellen die Binomialverteilung in einem Histogramm dar:



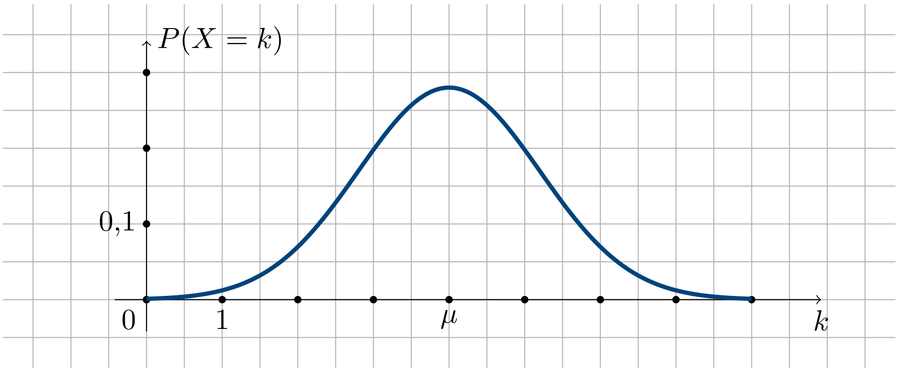
Wir berechnen den Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße X durch:

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot p; \qquad \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p); \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

9

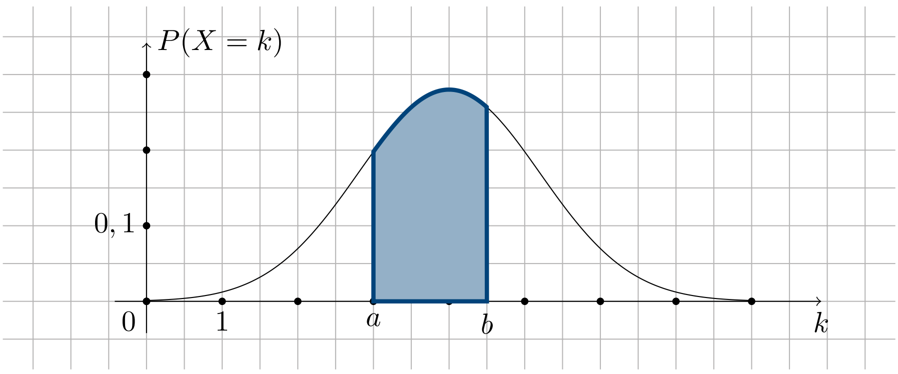
10 Wir definieren eine stetige Zufallsgröße X als normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, wenn die Dichtefunktion (die Gaußsche Glockenfunktion) φ gegeben ist durch:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten mit dem Integral der Dichtefunktion. Für $a < b \in \mathrm{R}$ gilt damit:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) \cdot dx$$

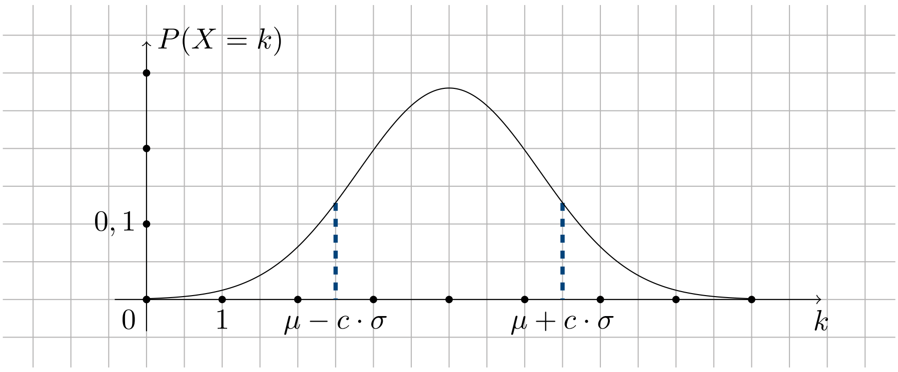


11

12 Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt oder normalverteilt, dann liegt die Trefferanzahl von X mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit jeweils im Prognoseintervall.

Wir berechnen den Prognoseintervall mit Hilfe der σ-Regeln:

Sicherheitswahrscheinlichkeit	Prognoseintervall	c
$68,3\ \%$	$[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$	1
$95,4\ \%$	$[\mu-2\cdot\sigma; \mu+2\cdot\sigma]$	2
$99,7\ \%$	$[\mu-3\cdot\sigma; \mu+3\cdot\sigma]$	3



Wir geben mit dem Konfidenzintervall I an, in welchem Bereich der wahre Wert eines unbekannten Parameters mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt. Es gilt für $h = X \cdot n^{-1}$:

$$I = \left[h - c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}};\ \ h + c\cdot\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$$

1

2 Gib an, welche Zufallsexperimente und Ergebnismengen zusammengehören.

1 Zufälliges Ziehen einer Kugel aus einer Urne

2 Zufälliges Drehen eines Glücksrades mit vier Sektoren

3 Zufälliges Werfen eines Würfel

4 Zufälliges Werfen einer Münze

A {Kopf; Zahl}

B $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$

C {Rot; Blau}

D {$1;\ 2;\ 3$; alles andere}

2.1 Erläutere den Unterschied zwischen den Begriffen 'Ereignis' und 'Ergebnis' mit Hilfe eines selbstgewählten Zufallsexperimentes.

2.2 Zwei LaPlace-Würfel A mit Ergebnismenge $S_1 = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ und B mit Ergebnismenge $S_2 = S_1$ werden zufällig geworfen. Eine Zufallsgröße X ist für $a \in S_1$ und $b \in S_2$ gegeben durch:

$$X : (a, b) \to a + b$$

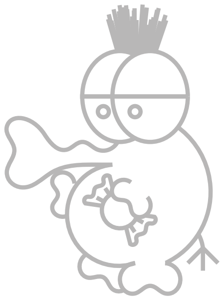
Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und gib die Ereignisse in aufzählender Schreibweise an, wenn gilt:
$T = \{\texttt{Primzahl}\}$; $R = \{\texttt{Ungerade Zahl}\}$.

$A = \overline{T}$ $\qquad$ $C = T \cup \overline{R}$

$B = T \cap R$ $\qquad$ $D = \overline{T} \cap \overline{R}$

2.3 Untersuche die Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt: 'Sind A und B Mengen, so gilt: $\overline{A} \cap B = (A \cup B) \setminus A$'
(Das Symbol $\setminus$ steht für ein mengentehoretisches 'ohne'; $\overline{A}$ steht für alle Elemente die nicht in A enthalten sind.)

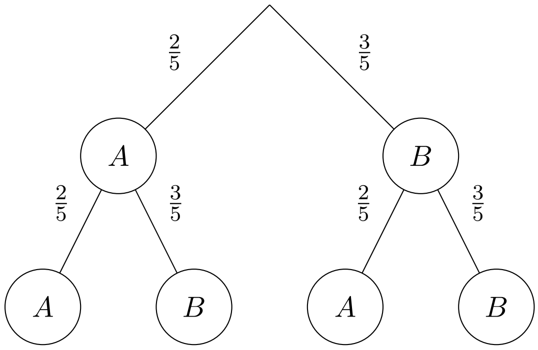
2.4 Der Bonbolefant denkt über Mengen nach.



Überlege welches Paradoxon auftaucht, wenn man die folgende Menge betrachtet:

$$M = \{\texttt{Alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten.}\}$$

3 Beschreibe jeweils ein mögliches Zufallsexperiment.



	A	$\overline{A}$	
B	$0,1$	$0,4$	$0,5$
$\overline{B}$	$0,3$	$0,2$	$0,5$
	$0,4$	$0,6$	1

3.1 In einer Urne befinden sich eine schwarze, zwei rote und drei goldene Kugeln. Es wird zweimal zufällig mit Zurücklegen gezogen. Skizziere das entsprechende Baumdiagramm und berechne damit die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

A = { zweimal dieselbe Farbe ziehen }

B = { zuerst eine rote, dann eine goldene Kugel ziehen }

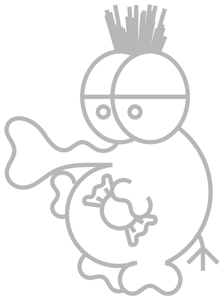
C = { eine schwarze und eine rote Kugel ziehen }

D = { nicht zweimal dieselbe Farbe ziehen }

3.2 In einer Klasse mit 30 Schülern sind 12 Vegetarier. 20 Schüler sind schlecht in Mathe, von denen wiederum die Hälfte Vegetarier sind. Gib die zugehörige Vierfeldertafel an. Zeige, dass die Ereignisse stochastisch abhängig sind. Berechne die prozentuale Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Vegetarier schlecht in Mathe ist. Berechne die prozentuale Wahrscheinlichkeit, dass jemand der schlecht in Mathe ist, ein Vegetarier ist.

3.3 Zwei Spieler spielen russisch Roulette mit Platzpatronen. Sie benutzten einen fairen Trommelrevolver mit sechs Kammern. In einer Kammer ist eine Platzpatrone. Sie drehen die Trommel vor dem Spiel so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Kugel in einer Kammer befindet, für alle Kammern gleich groß ist. Danach drücken sie abwechselnd (dabei wird die Trommel immer um eine Position weiter bewegt), bis die Platzpatrone platzt. Ermittle mit Hilfe eines geeigneten Baumdiagrammes, ob es günstiger ist zu beginnen, wenn man nicht die Platzpatrone platzen lassen will.

3.4 Der Bonbolefant zieht zufällig Bonbos aus seiner Bonboniere mir n roten und drei weißen Bonbons.



Ermittle, wie viele rote Bonbons mindestens in der Bonboniere sein müssen, damit der Bonbolefant mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $42\ \%$ beim dreimaligen ziehen mindestens zwei rote Bonbons zieht.

4 Erläutere die Begriffe Permutation, Kombination und Variation anhand der Menge M, wenn gilt:

$$M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$$

Wähle für $k = 2$ und ermittle jeweils die Anzahl der Möglichkeiten sowohl rechnerisch als auch aufzählend.

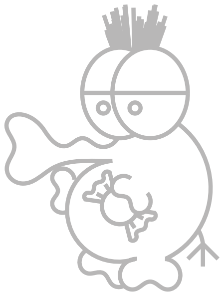
4.1 Berechne die Anzahl der Möglichkeiten vier Schüler anzuordnen.

4.2 Berechne die Anzahl der Möglichkeiten aus vier Schülern zwei Klassensprecher auszuwählen, wobei die zweite Wahl der Stellvertreter ist.

4.3 Berechne die Anzahl der Möglichkeiten aus vier Schülern mindestens zwei Schüler auszuwählen, wobei die Reihenfolge egal ist.

4.4 Der Bonbolefant will aus 49 Bonbons zufällig 6 ganz bestimmte Bonbons ziehen.

Taschenrechner erlaubt!



Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass er beim ersten Versuch die 6 Bonbons erwischt.

5 Ermittle mit Hilfe der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung den Erwartungswert, die Varainz und die Standardabweichung von X.

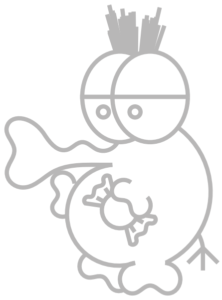
x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,4$	$0,4$	$0,1$

5.1 Ein handelsüblicher Würfel wird zweimal zufällig geworfen. Die Zufallsgröße X zählt die Augensumme der Würfe. Gib die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung an und ermittle damit den Erwartungswert, die Varainz und die Standardabweichung.

5.2 Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren wird bei einem Einsatz von 3 Euro einmal zufällig gedreht. In einem Sektor bekommt der Spieler 1 Euro, bei den anderen Sektoren bekommt der Spieler 4 Euro. Untersuche rechnerisch, ob das Spiel fair ist.

5.3 Ein Glücksrad mit drei Sektoren und den Sektorwinkeln $42°$; α und β wird bei einem Einsatz von 5 Euro einmal zufällig gedreht. Erscheint der Sektor mit $42°$, bekommt der Spieler 0 Euro. Erscheint der Sektor mit α bekommt man doppelt so viel, wie wenn der Sektor mit Winkel β erscheint. Ermittte mögliche Winkel, sodass das Spiel fair ist.

5.4 Der Bonbolefant denkt über Varianz und Standardabweichung nach.

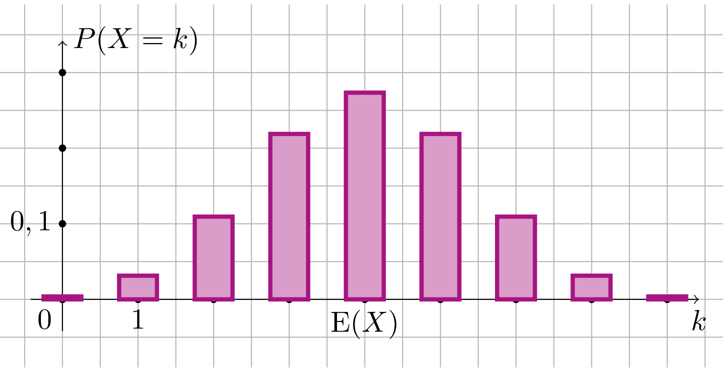


Untersuche, ob eine Wahrscheinlichkeitsverteilung möglich ist,
sodass Varianz und Standardabweichung identisch sind.

6

7

8 Gegeben ist das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße.



Gib n und p an und beschreibe ein möglichses zugehöriges Zufallsexperiment.

8.1 Skizziere das Histogramm einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n=6$ und $p=0,3$.

8.2 Ein Fußballspieler schießt 42-Mal einen Elfmeter. Er hat eine Trefferwahrscharscheinlichkeit von $p = 0,5$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 21-Mal trift.

Taschenrechner erlaubt!

8.3 Ein Fußballspieler schießt 42-Mal einen Elfmeter. Er hat eine Trefferwahrscharscheinlichkeit von $p = 0,5$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er...

... höchstens 37 Treffer hat.

... mehr als 20 Treffer hat.

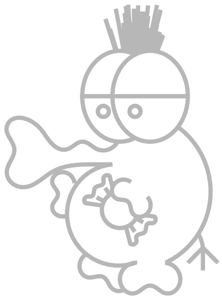
... weniger als 8 Treffer hat.

... keinen Treffer hat.

Taschenrechner erlaubt!

8.4 Der Bonbonlefant zieht zufällig aus einer Bonboniere mit 58 weißen und 42 roten Bonbons.

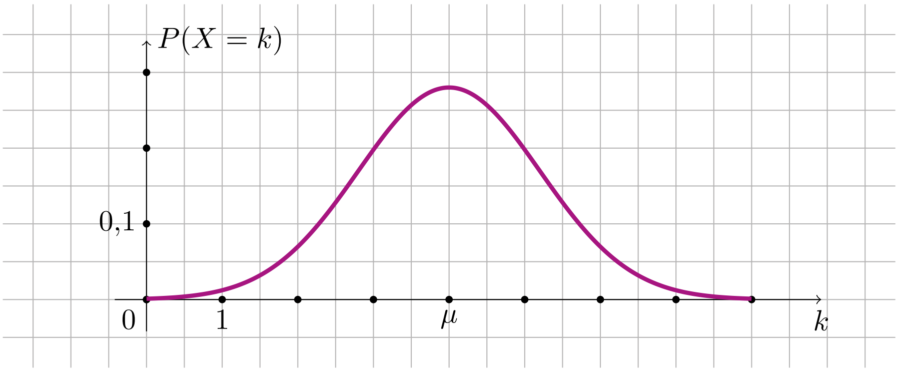
Taschenrechner erlaubt!



Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass er beim 42-Maligen Ziehen mit Zurücklegen mindestens 10 aber weniger als 20 rote Bonbons zieht.

9

10 Gegeben ist die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X mit $\mu = 4$.



Beschreibe ein mögliches zugehöriges Zufallsexperiment und ermittle zeichnerisch den Wert von $P(2 \leq X \leq 5)$.

10.1 Skizziere die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit $\mu = 3$ und $\sigma = 1$.

Taschenrechner erlaubt!

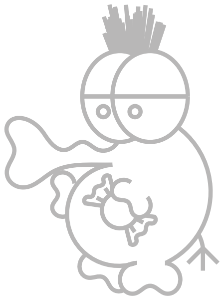
10.2 Ein Sägewerk verkauft Bretter mit einer Dicke von 25mm. Aus einer Qualitätskontrolle weiß man, dass die Dicke der Bretter näherungsweise nomalverteilt mit $\mu = 25\text{mm}$ und $\sigma = 0,42\text{mm}$ ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Dielenbrettern mehr als $24,9\text{mm}$ und höchstens $25,1\text{mm}$ dick ist.

Taschenrechner erlaubt!

10.3 Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Hochpuntkes und der Wendepunkte der Dichtefunktion φ, wenn gilt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

10.4 Der Bonbonlefant zieht zufällig aus einer Bonboniere mit unendlich vielen Bonbons.



Ermittle die Wahrscheinlichkeit er sein einmaliges Lieblingsbonbon zieht.

11

12 Intervalle

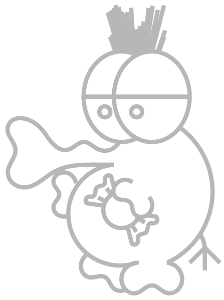
Immer mit Merkhilfe und Taschenrechner!

12.1 Eine Zufallsgröße ist binomialverteilt mit $\mu = 5$ und $\sigma = 1$. Gib an, in welchem Intervall sich etwa $68,3$ % der Werte der Zufallsgröße befinden

12.2 Eine Zufallsgröße ist normalverteilt mit $\mu = 3$ und $\sigma = 0,2$. Untersuche die Aussage 'Mit mehr als 99 % iger Sicherheit, liegt ein Wert der Zufallsgröße innerhalb des Intervalles $[2,4;\ 3,6]$'

12.3 Vor der Einführung eines neuen Produktes werden 1000 zufällig ausgewählte Personen befragt, ob sie den Kauf in Erwägung ziehen. 214 Personen bejahen diese Frage. Berechne mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von $95,4$ % das Konfidenzintervall, in dem die tatsächliche Erfolgswahrscheinlichkeit liegt.

13 Der Bonbolefant serviert an seiner Hochzeit jedem Gast ein vegetarisches Bonbon oder ein Fleischbonbon.



Er will zu seiner Feier 200 Elefanten einladen. Er weiß, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elefant Vegetarier ist, etwa 10% beträgt. Ermittle, wie viele Fleischbonbons er bereithalten sollte, damit er mit $99{,}7$ prozentiger Sicherheit alle Gäste glücklich macht.

Katastrophe