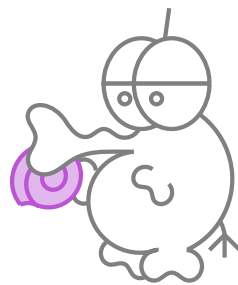


2512026174031642



Schnecken liebsch

Exposition

### 12.13. Integralrechnung

Die Bildungseinheit **Integralrechnung** knüpft an die von den Schülerinnen und Schülern bereits erworbenen Kenntnisse der Differenzialrechnung an und legt den Zusammenhang zwischen diesen grundlegenden Teilgebieten der Analysis dar. Sie vermittelt drei Aspekte des Integralbegriffs, das Integral als Rekonstruktion einer Größe, das Integral als Grenzwert einer Summe sowie das Integral als Flächeninhalt und bezieht diese wechselseitig aufeinander. Ausgehend von der Annäherung krummlinig begrenzter Flächen wird mithilfe einer propädeutischen Grenzwertbetrachtung ein neuer Weg zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten entwickelt. Sie greift insbesondere die in der Sekundarstufe I verwendeten Strategien zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten auf, z.B. die Zerlegung in Teilflächen beziehungsweise Teillörper. Bekannte Formeln zur Berechnung von Volumen werden mittels Integralrechnung bestätigt.

Im grundlegenden Anforderungsniveau keine Rauminhalte oder Volumen!

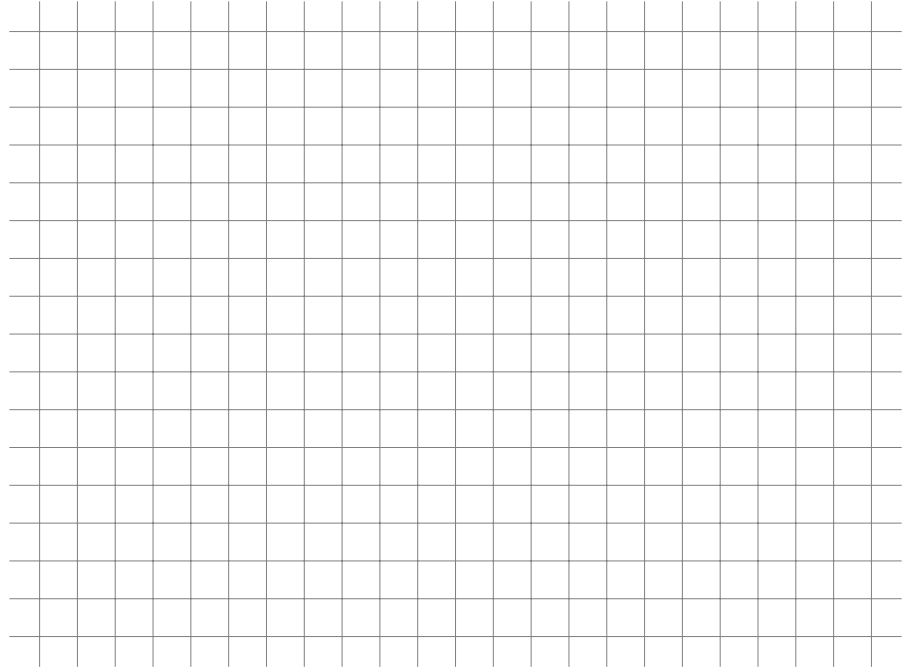
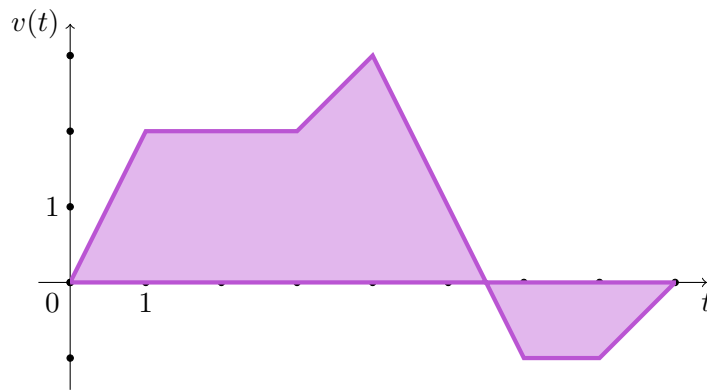
## Komplikation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

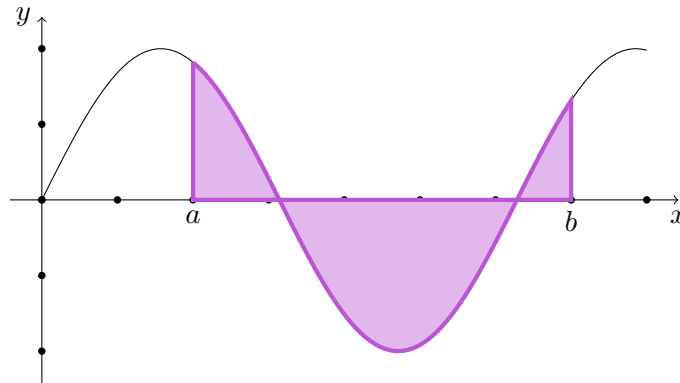
Untersuche, welche Bedeutung der **Flächeninhalt** zwischen dem Funktionsgraphen  $v(t)$  und der Zeitachse  $t$  hat, wenn das Schaubild die Geschwindigkeit einer Schnecke abhängig von der Zeit modelliert. Ermittle und interpretiere in diesem Zusammenhang die Flächen über den Intervallen auf der  $x$ -Achse:

$$[0; 5; 5]; \quad [5, 5; 8]; \quad [0; 8]$$

Beschreibe den kompletten Kriechvorgang.



- 1 Die Schülerinnen und Schüler deuten das bestimmte Integral als rekonstruierten Bestand sowie als **Flächeninhalt** zwischen Funktionsgraph und x-Achse.



$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

Sie ermitteln den Wert bestimmter Integrale mittels Flächenzerlegung näherungsweise und nutzen den propädeutischen Grenzwertbegriff beim Übergang von Unter- und Obersummen zum bestimmten Integral. Schließlich interpretieren die Schülerinnen und Schüler den Wert eines bestimmten Integrals als Bilanz orientierter Flächeninhalte und erläutern die **Eigenschaften** des bestimmten Integrals.

- **Vertauschen der Integrationsgrenzen** :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

- **Intervalladitivität** :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx + \int_b^c f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx$$

- **Linearität** :

$$\int_a^b (m \cdot f(x) + n \cdot g(x)) \cdot dx = m \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx + n \cdot \int_a^b g(x) \cdot dx$$



2 Die Schülerinnen und Schüler erläutern den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

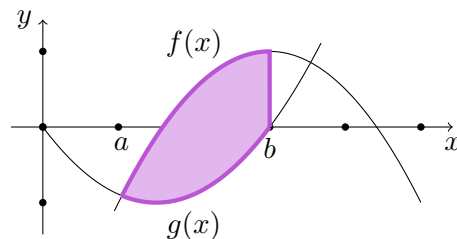
mithilfe der Integralfunktion

$$I(x) = \int_q^x f(t) \cdot dt$$

Im grundlegenden Anforderungsniveau wird keine Integralfunktion verlangt!

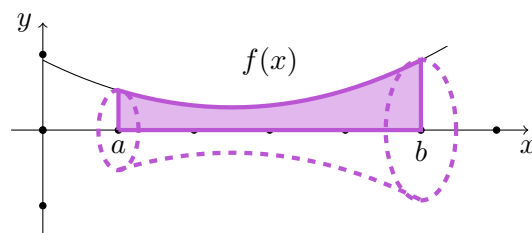
geometrisch sowie anschaulich als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff. Den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung nutzen sie zur Berechnung von bestimmten Integralen und zur Berechnung von Integrationsgrenzen bei gegebenem Integralwert.

3 Die Schülerinnen und Schüler berechnen Flächeninhalte



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

und Volumen von Körpern,



$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$$

Im grundlegenden Anforderungsniveau werden keine Volumeberechnungen verlangt!

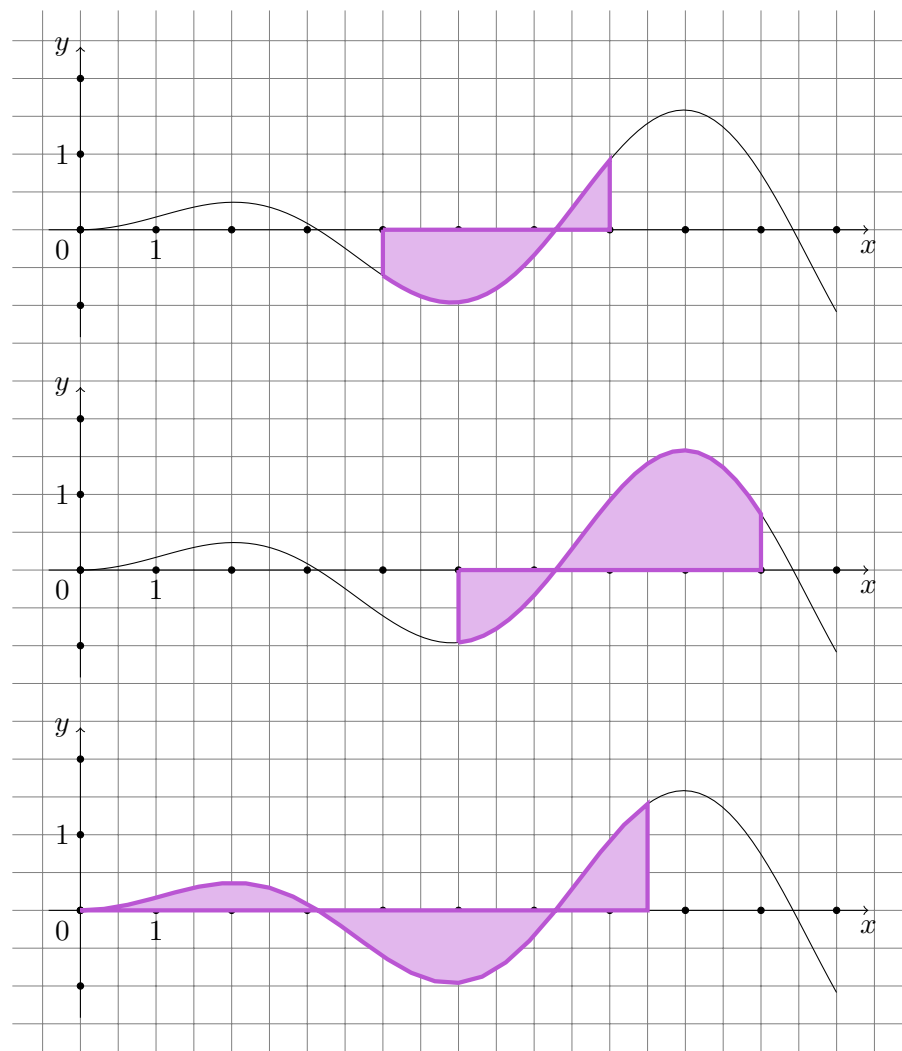
die durch Rotation um die x-Achse entstehen, auch im Kontext der Anwendung. Sie weisen elementargeometrische Volumenformeln nach.



1 Aufgaben zum **Flächeninhalt** :

1.0 Gib an, welches Integral zu welchem orientierten **Flächeninhalt** gehört und entscheide, ob das Integral näherungsweise einen positiven Wert oder einen negativen Wert oder keines von beidem hat.

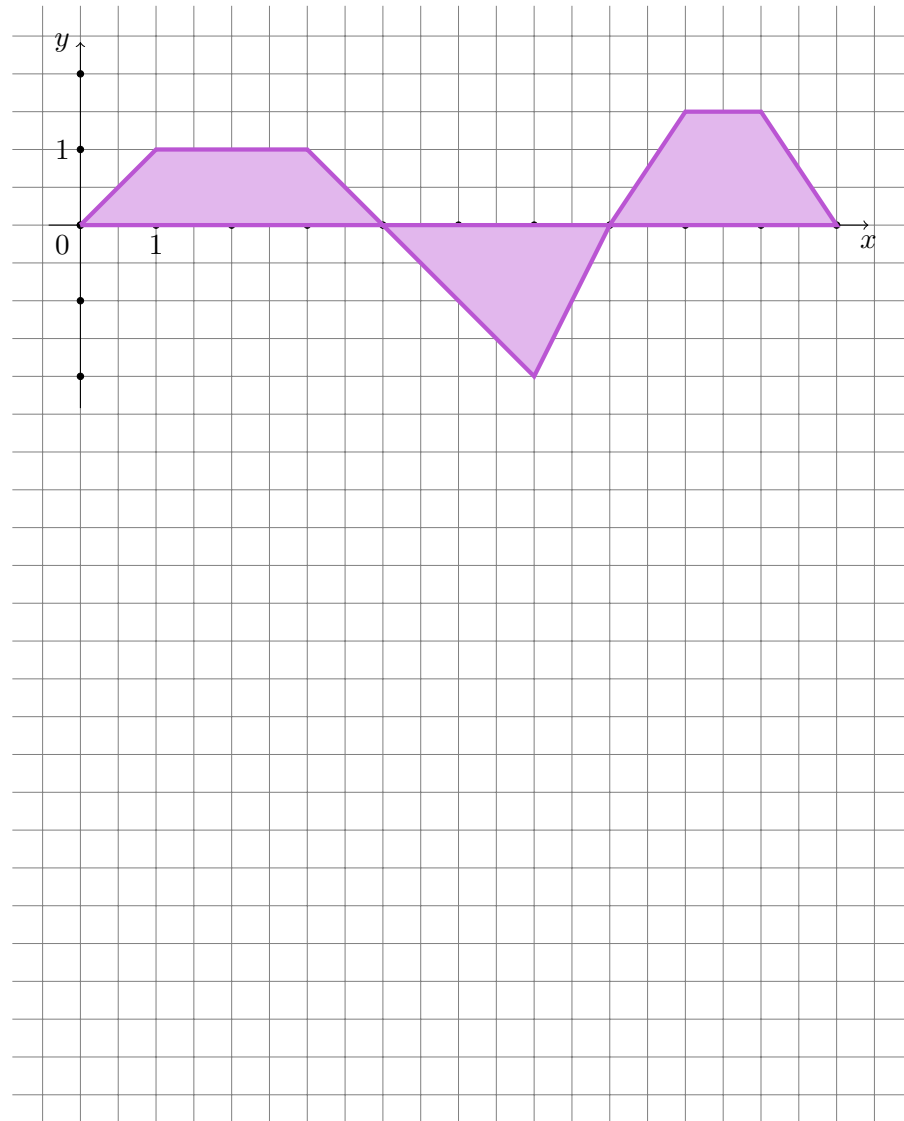
$$A_1 = \int_0^{7,5} f(x) \cdot dx \quad A_2 = \int_5^9 f(x) \cdot dx \quad A_3 = \int_4^7 f(x) \cdot dx$$



1.1 Gib jeweils den Wert des Integrals an.

$$I_1 = \int_1^4 f(x) \cdot dx; \quad I_2 = \int_3^5 f(x) \cdot dx; \quad I_3 = \int_0^7 f(x) \cdot dx$$

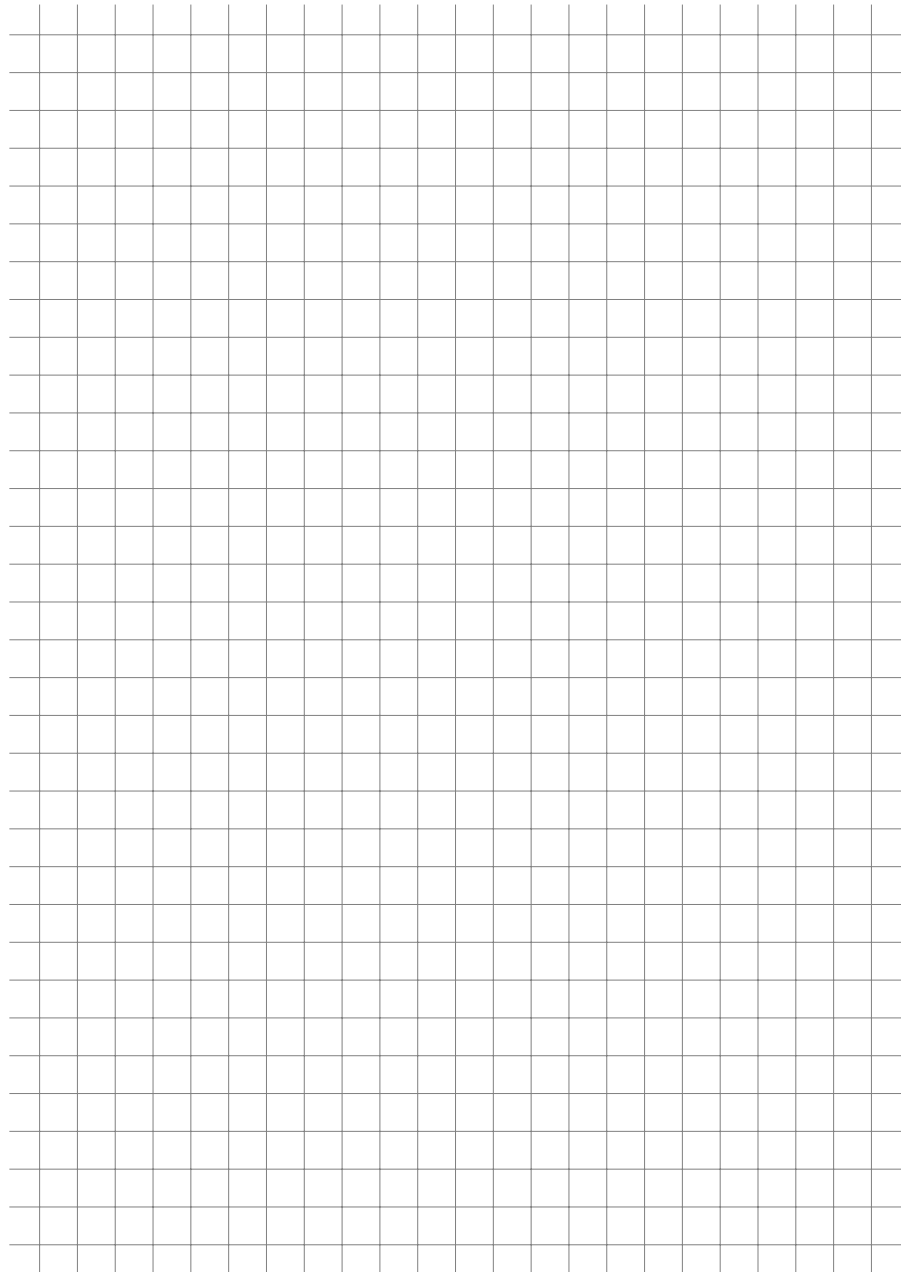
$$I_4 = \int_0^{10} f(x) \cdot dx; \quad I_5 = \int_7^{10} f(x) \cdot dx; \quad I_6 = \int_{7,5}^{4,5} f(x) \cdot dx$$



1.2 Ermittle jeweils zeichnerisch näherungsweise den Wert des Integrals.

Taschenrechner  
erlaubt!

$$\int_0^4 \left( \frac{1}{8} \cdot (x-2)^3 + 1 \right) \cdot dx; \quad \int_0^{7,5} \frac{1}{5} \cdot x \cdot \sin(x) \cdot dx$$



1.3 Bestimme jeweils exakt den Wert.

1.3.1

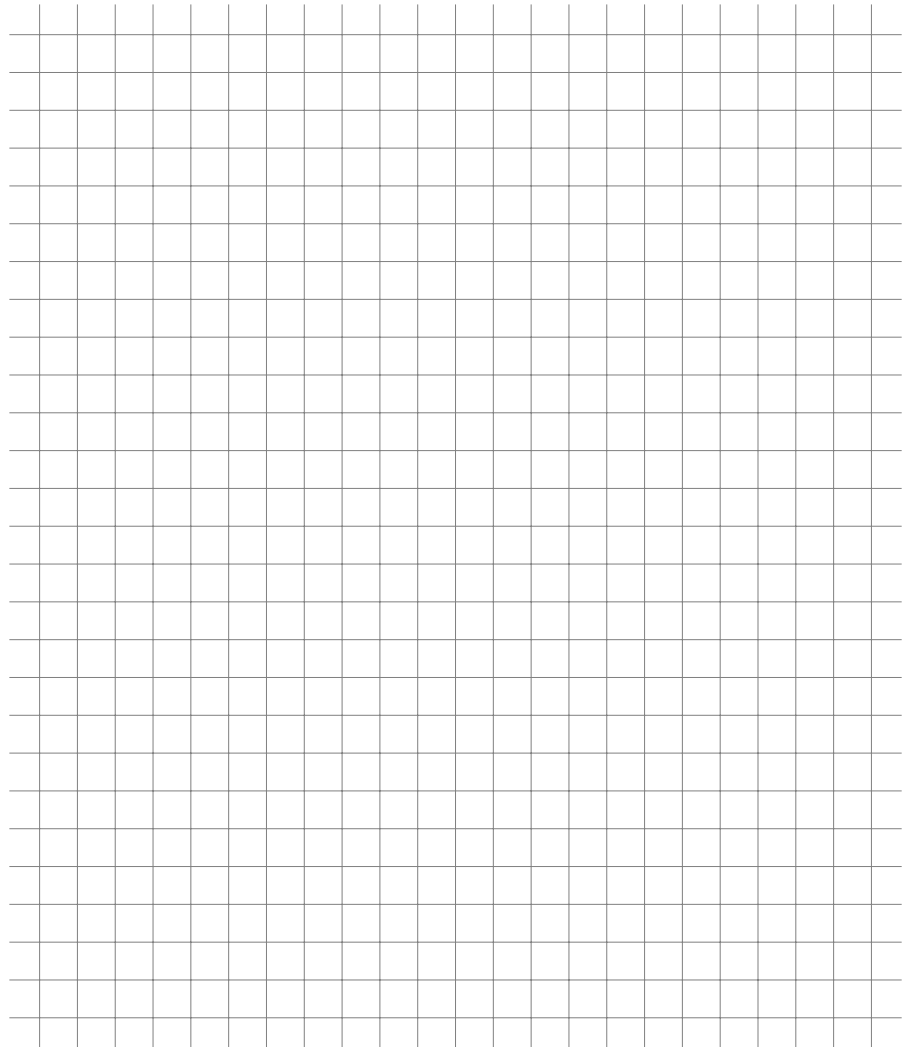
$$\int_0^7 (0,5 \cdot x - 1) \cdot dx$$

1.3.2

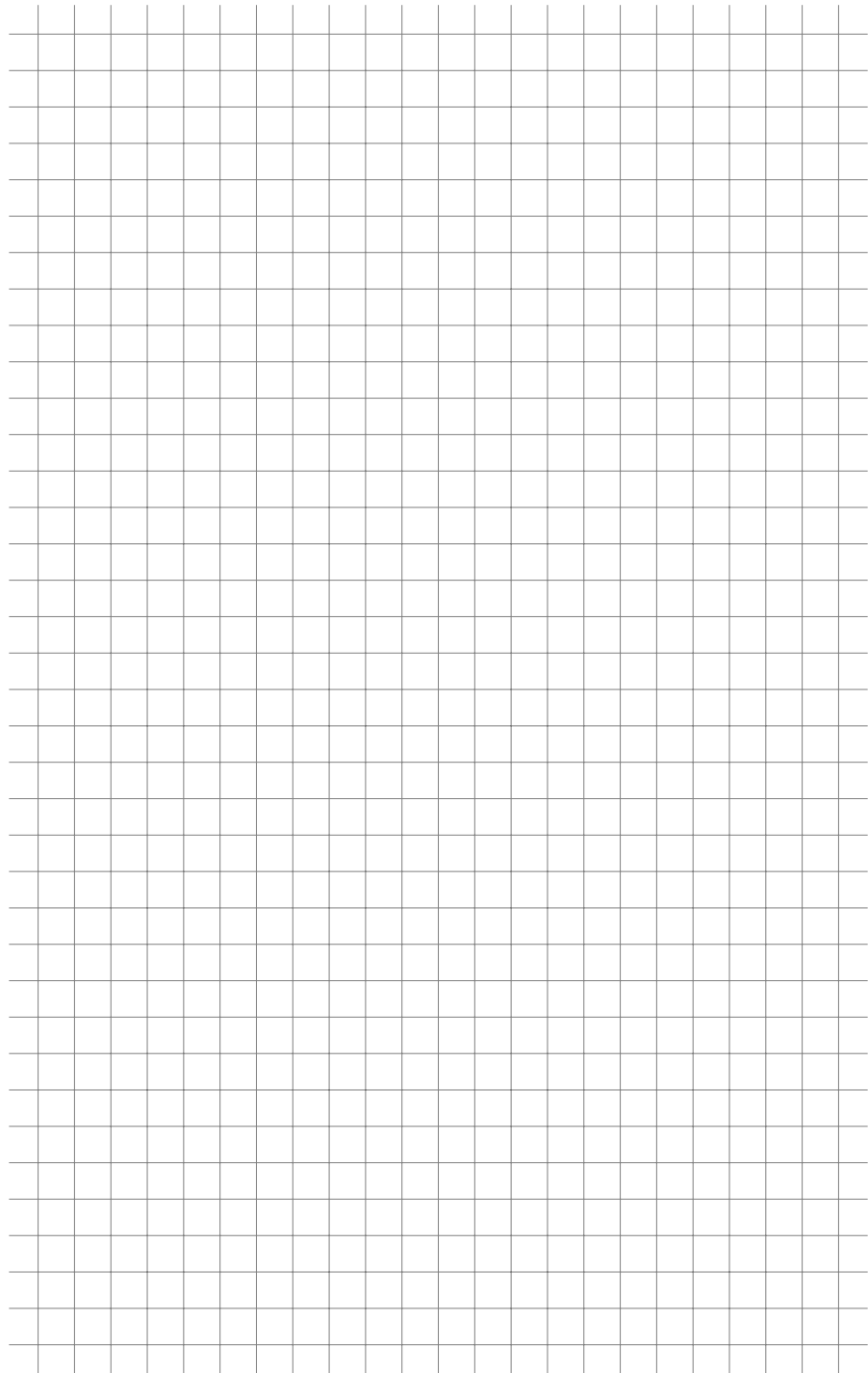
$$\int_{-3}^0 (2 \cdot x^3 + x) \cdot dx - 2 \int_3^0 (x^3 + 0,5 \cdot x) \cdot dx$$

1.3.3

$$\int_0^{4\pi} (2 \cdot \sin(x) + x) \cdot dx$$



1.4 Erläutere die Symbolschreibweise des Integrales durch Annäherung des Flächeninhaltes mit Hilfe von  $n \rightarrow \infty$  Rechtecken der Höhe  $f(x)$  und der Breite  $dx$ .



2 Aufgaben zum **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

2.0 Ermittle jeweils den Rechenfehler und berechne das exakte Ergebnis

2.0.1

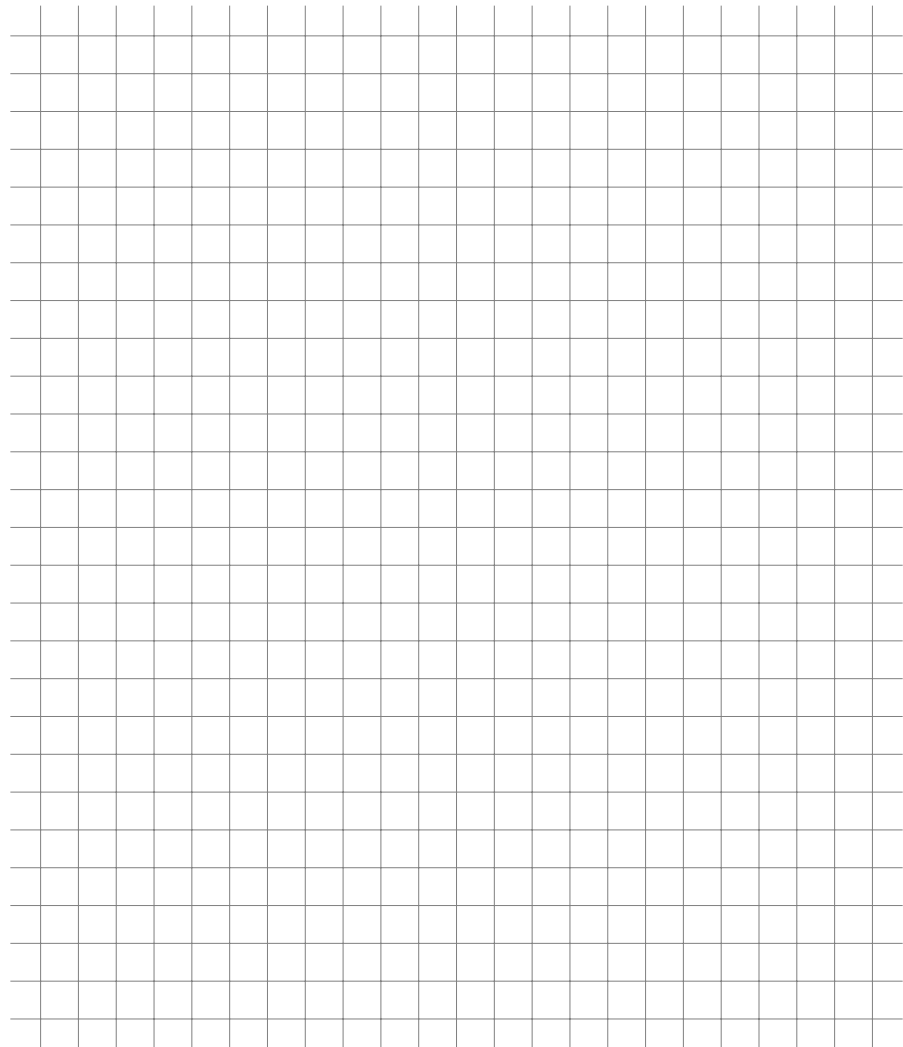
$$\int_0^{\ln(3)} e^x \cdot dx = [e^x]_0^{\ln(3)} = e^{\ln(3)} + e^0 = 3 + 1 = 4$$

2.0.2

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(0) + \cos(\pi) = -1 + (-1) = -2$$

2.0.3

$$\int_0^4 x \cdot dx = [x]_0^4 = 4 - 0 = 4$$



2.1 Berechne jeweils den Wert des Integrales.

2.1.1

$$\int_0^3 2 \cdot x \cdot dx$$

2.1.2

$$\int_0^\pi \sin(x) \cdot dx$$

2.1.3

$$\int_0^{\ln(3)} e^x \cdot dx$$

2.1.4

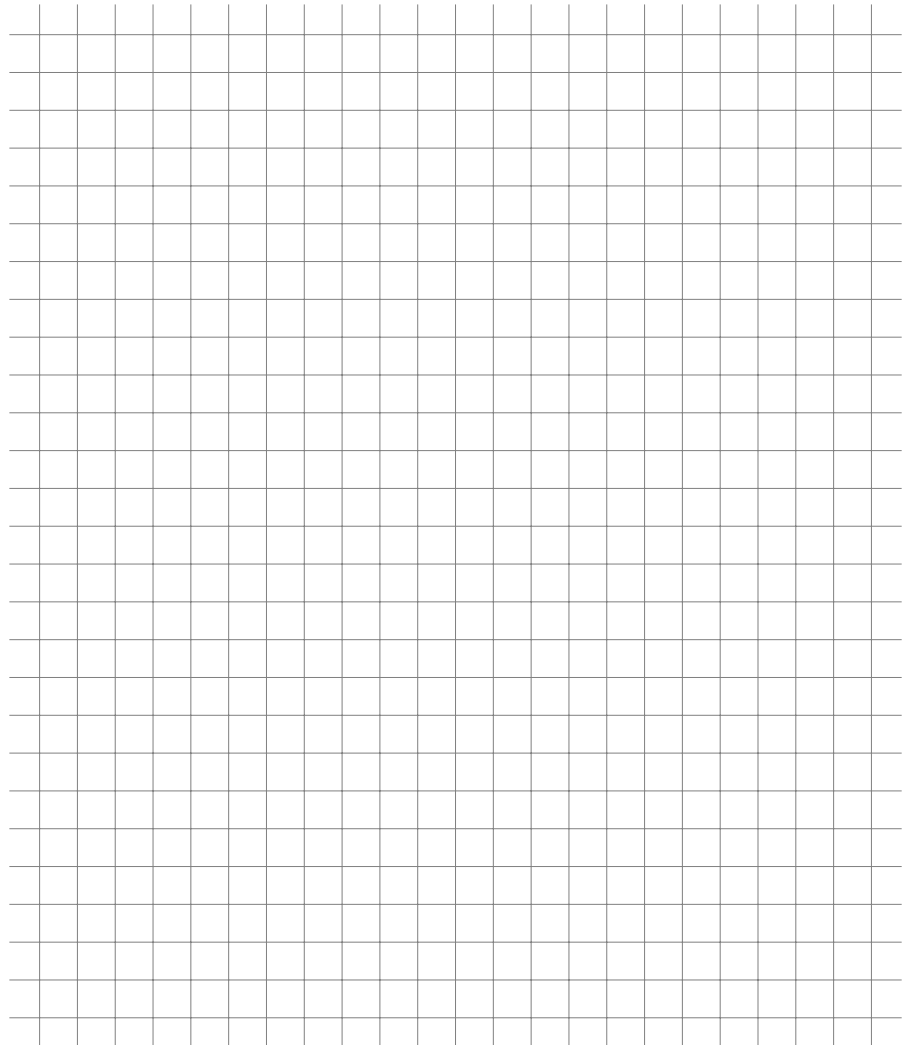
$$\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) \cdot dx$$

2.1.5

$$\int_{0,5 \cdot \pi}^{1,5 \cdot \pi} \cos(x) \cdot dx$$

2.1.6

$$\int_0^1 (e^x + x) \cdot dx$$



2.2 Ermittle jeweils den Wert des Integrales.

2.2.1

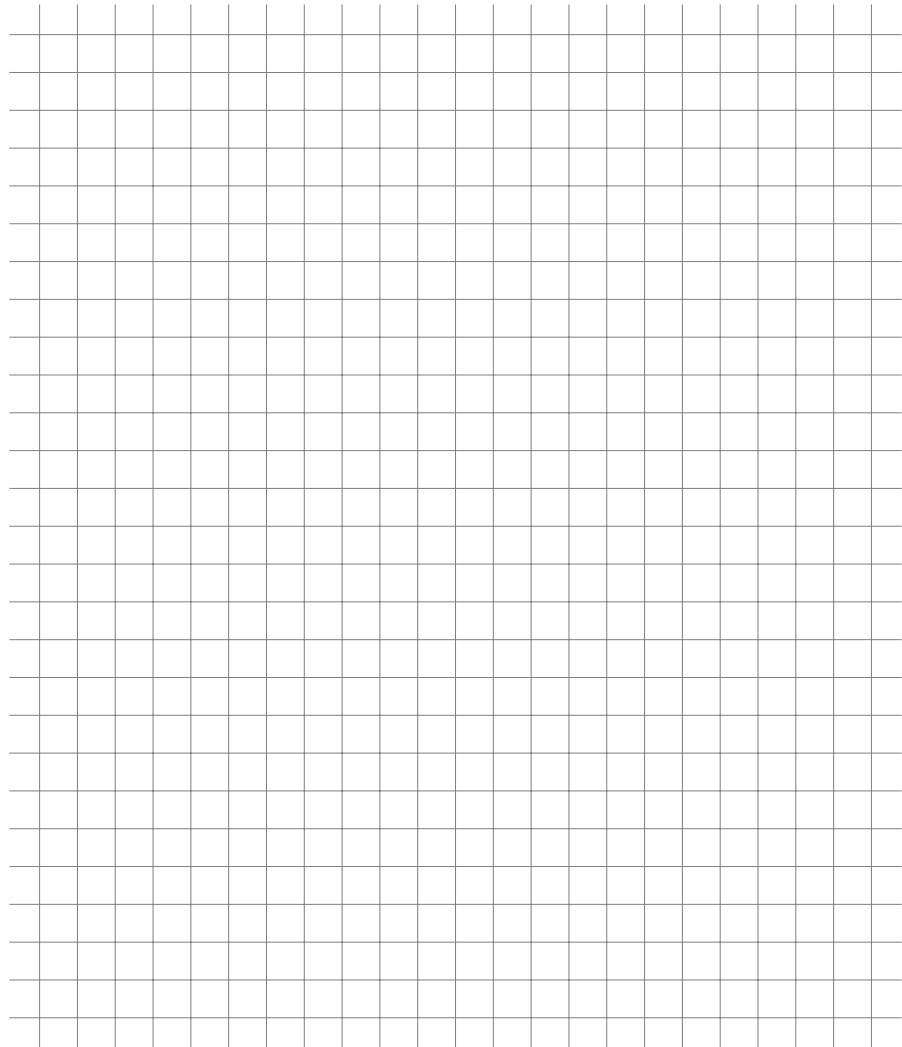
$$\int_0^3 \left( \frac{1}{8} \cdot (x-2)^3 + 1 \right) \cdot dx$$

2.2.2

$$\int_{-4}^{-2} 3,5 \cdot \sin(\pi \cdot x - 2) \cdot dx$$

2.2.3

$$\int_0^{\ln(3)} 3 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot dx$$



2.3 Gib jeweils alle  $z \in \mathbb{R}$  an, für die gilt:

Taschenrechner  
erlaubt!

2.3.1

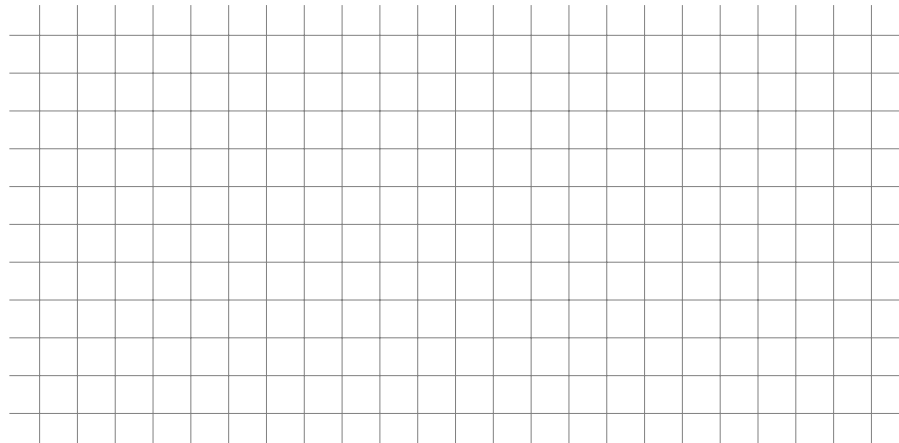
$$\int_0^z \left( \frac{1}{3}x^2 - x \right) \cdot dx = 100$$

2.3.2

$$\int_{-z}^z \sin(2 \cdot x) \cdot dx = 100$$

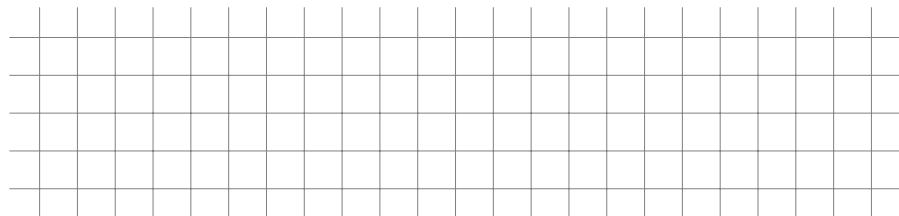
2.3.3

$$\int_z^{z+1} e^x \cdot dx = 42$$



2.4 Untersuche die Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt: 'Die Integralfunktion  $I$  hat genau eine Nullstelle bei  $x = 2$ , wenn gilt:

$$I(x) = \int_2^x \cos(t) \cdot dt$$

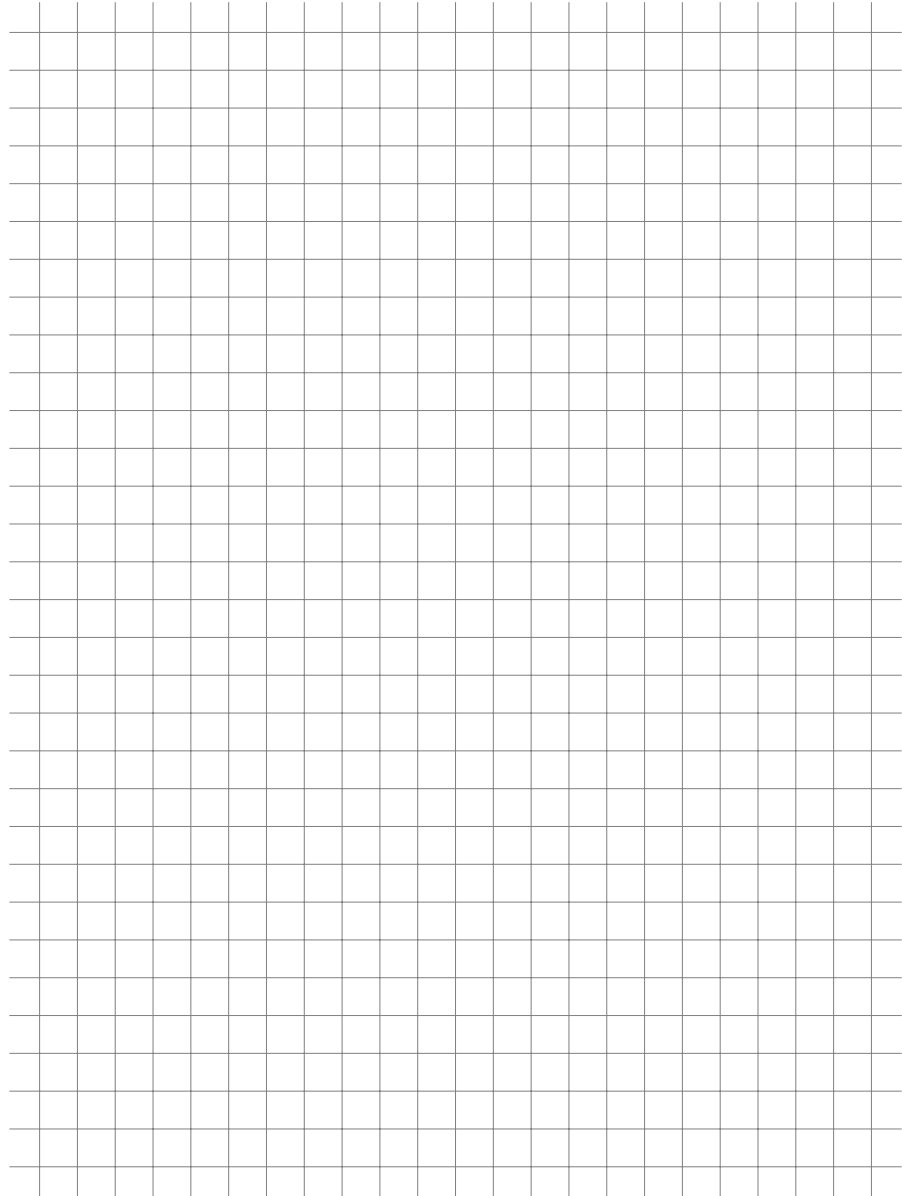


3 Aufgaben zu **Flächeninhalte und Volumen** :

3.0 Skizziere und berechne die Fläche, die berechnet wird durch:

$$\int_0^3 (g(x) - f(x)) \cdot dx$$

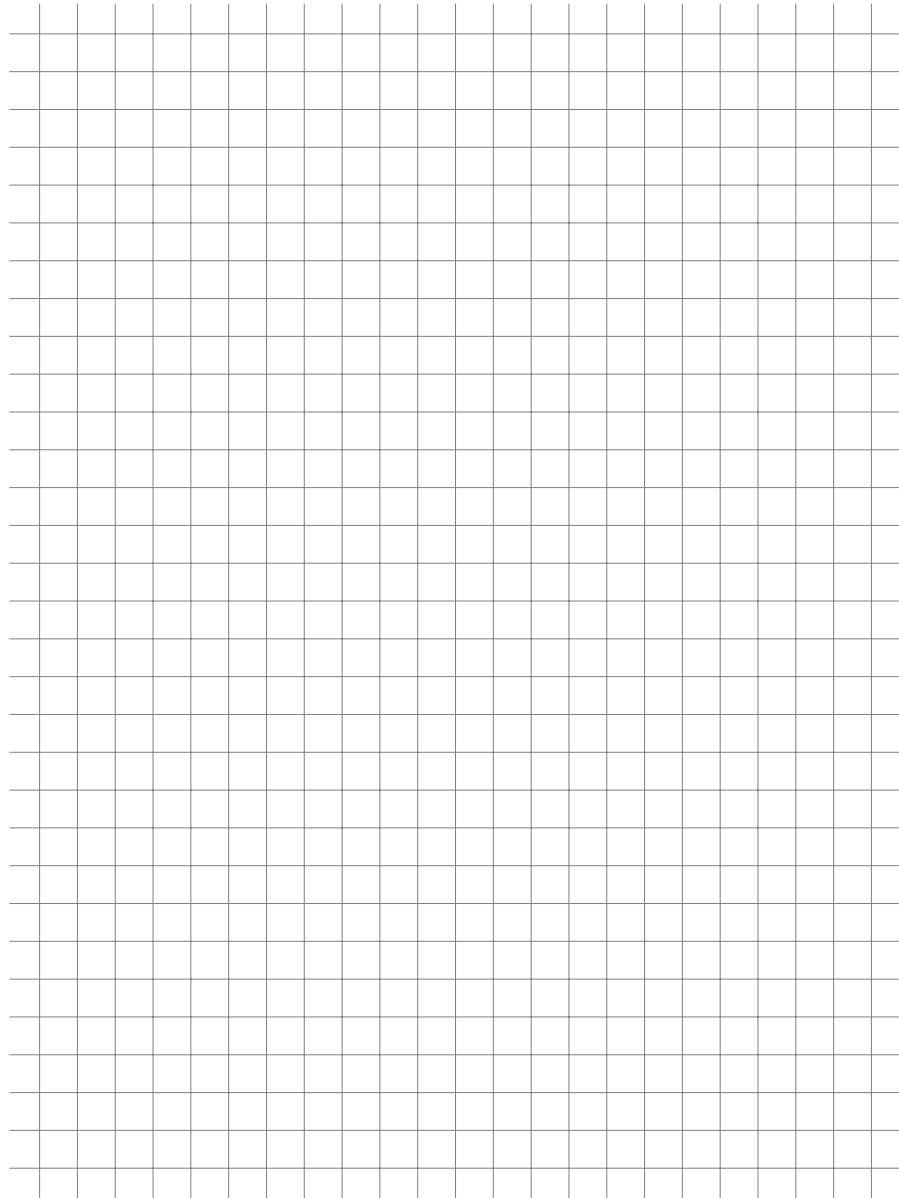
$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^2 + 3; \quad g(x) = (x - 2)^2 + 1$$



3.1 Berechne und Skizziere die Summe aller Flächenstücke, die von den Schaubildern der Funktionen  $f$  und  $g$  eingeschlossen werden, wenn gilt:

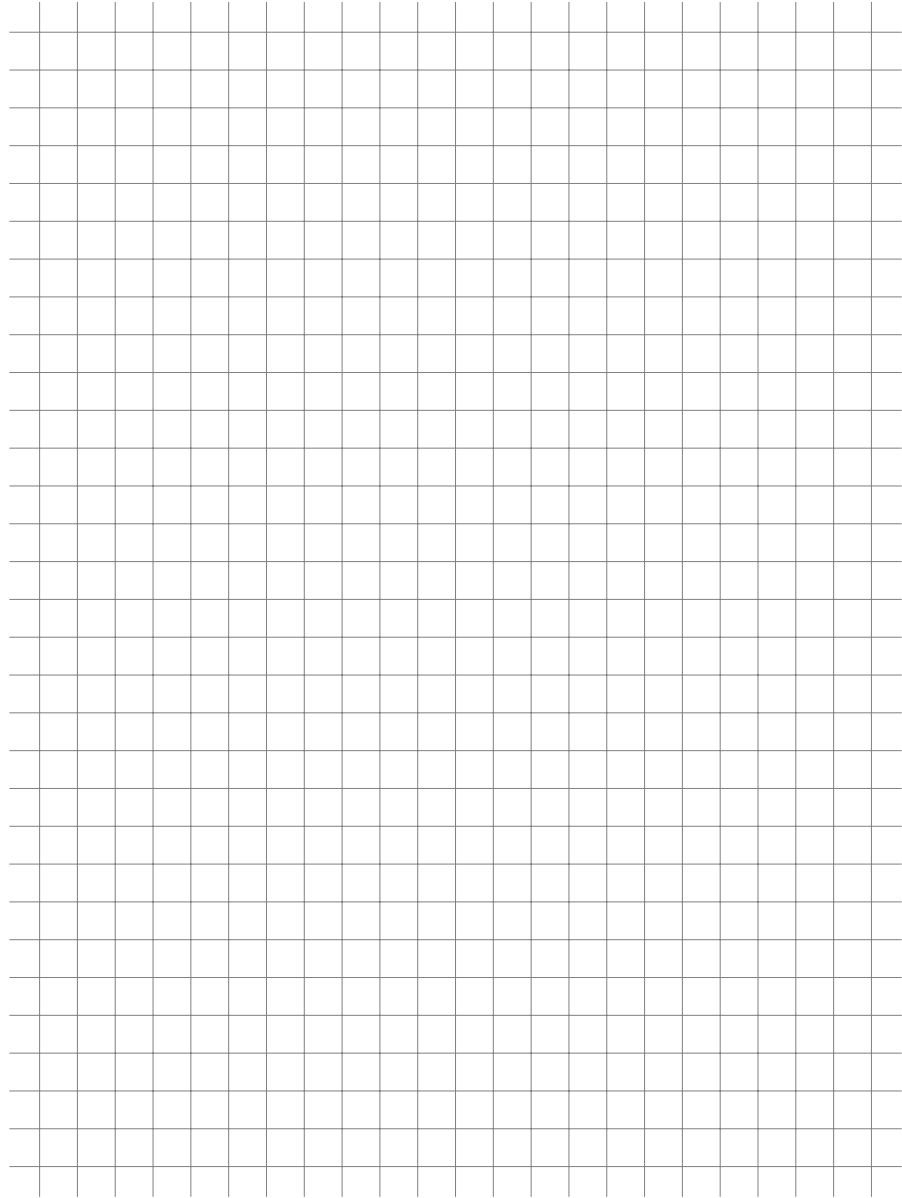
$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2; \quad g(x) = 0,5 \cdot x^2 - 2$$

Taschenrechner  
erlaubt!



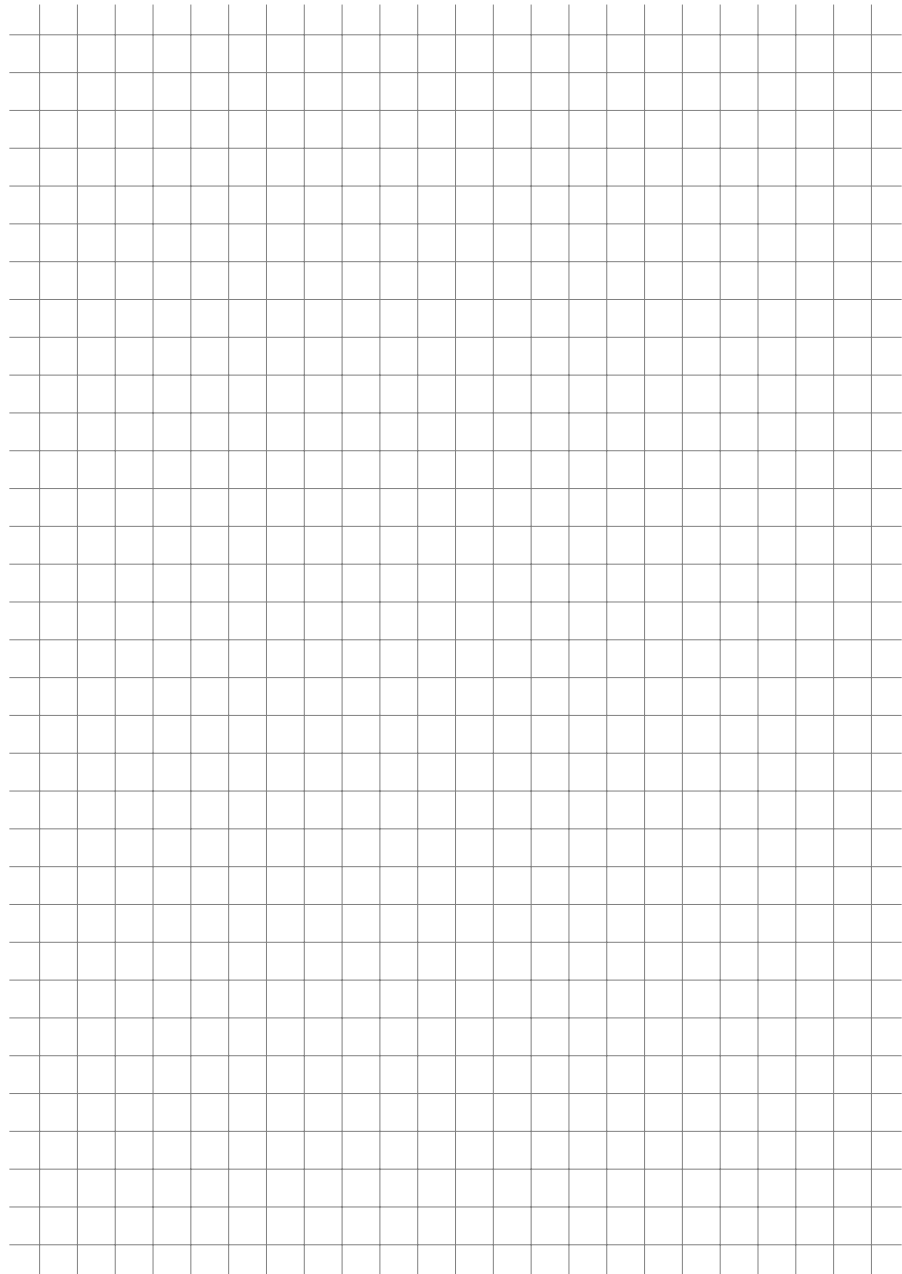
3.2 Die Fläche, die von  $f$  und der  $x$ -Achse eingeschlossen wird rotiert um die  $x$ -Achse. Berechne den entstehenden Roatationskörper, wenn gilt:

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$



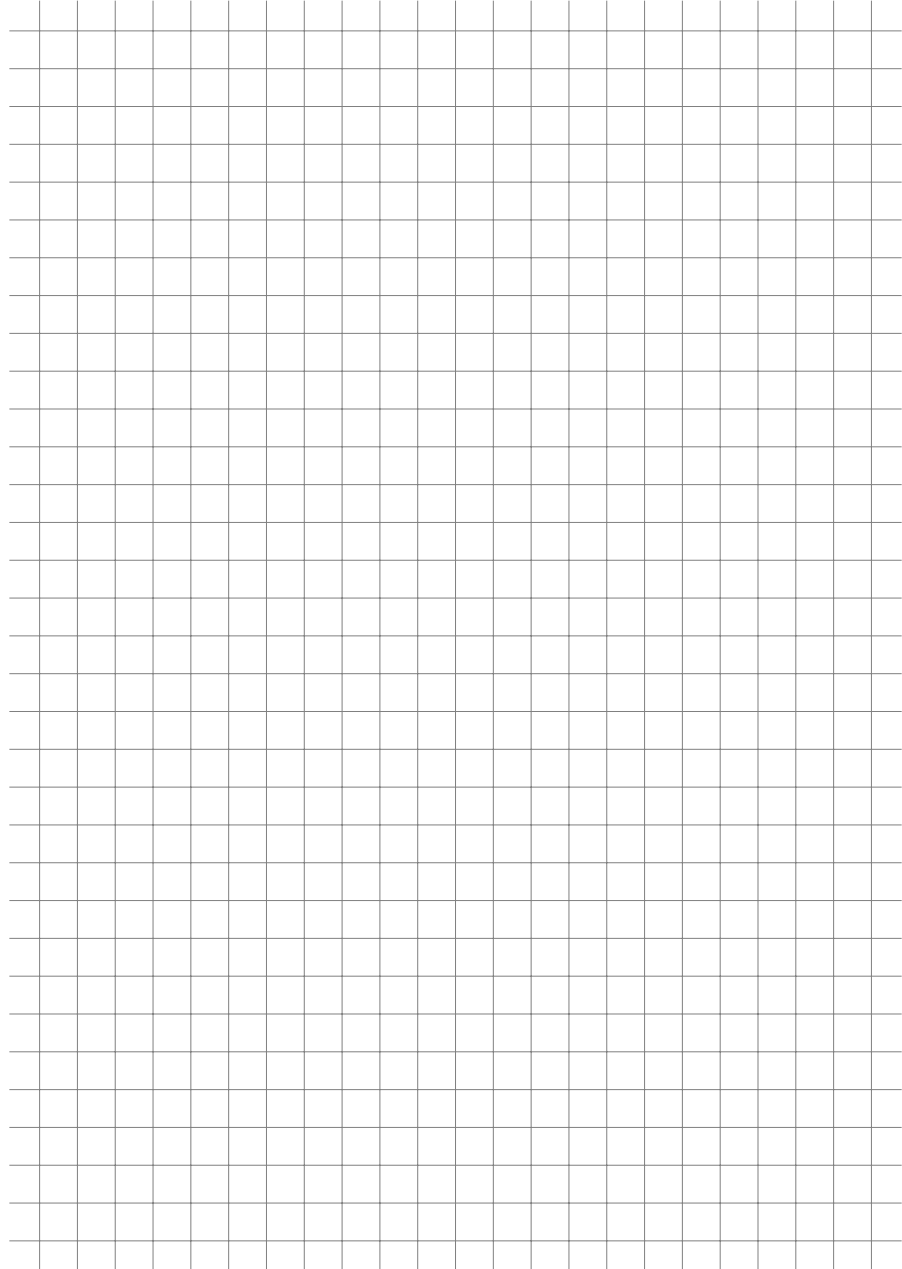
3.3 Zeige, dass für das Volumen  $V$  eines Kegels mit der Höhe  $h \in \mathbb{R}^+$  und dem Radius  $r \in \mathbb{R}^+$  gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$



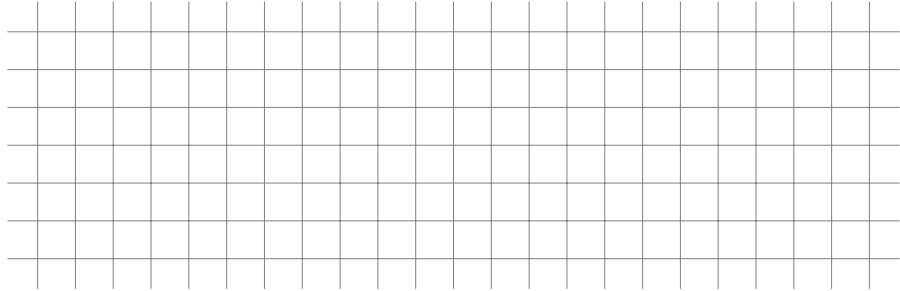
3.4 Berechne das Volumen der unendlich großen Vase, die in  $[1;n]$  für  $n \rightarrow \infty$  durch den Rotationskörper der Randfunktion  $f$  modelliert wird, wenn gilt:

$$f(x) = x^{-1}$$



1 Ermittle näherungsweise zeichnerisch den Wert des Ingegrales:

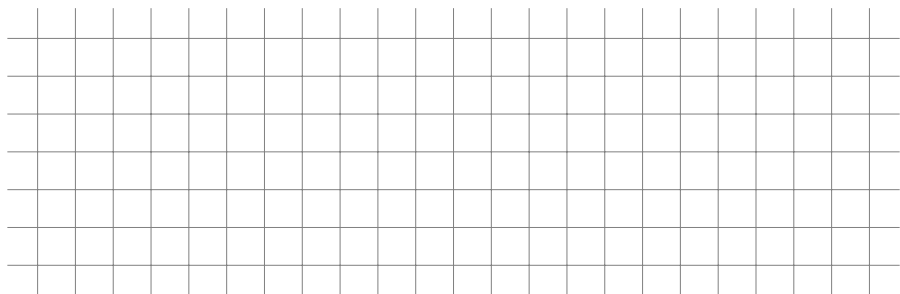
$$\int_0^5 f(x) \cdot dx$$



2 Berechne den Wert des Integrales:

$$\int_0^{6,18208} e^{0,5 \cdot x} \cdot dx$$

Taschenrechner  
erlaubt!



3 Ermittle in  $[0; 14]$  die Fläche zwischen den Schaubildern von  $f$  und  $g$ , wenn gilt:

$$f(x) = \sin(\pi \cdot x) + 3; \quad g(x) = \cos(\pi \cdot x)$$

