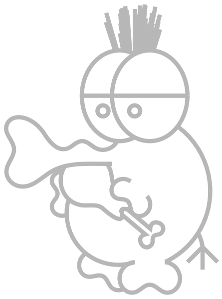
Exposition

Schlegele ~~Mathe~~ liebsch



12.12.Differenzialrechnung

Die Bildungsplaneinheit Differenzialrechnung nimmt ihren Ausgang von den in der Eingangsklasse erworbenen Vorstellungen zum Ableitungsbegriff und hat zum Ziel, den Schülerinnen und Schülern ein tieferes Verständnis von Funktionen zu eröffnen. Basierend auf einem propädeutischen Grenzwertbegriff erleben sie durch Grenzwertbetrachtungen, dass die Frage nach der Steigung einer gekrümmten Kurve auf die Frage nach der Steigung einer Geraden zurückgeführt werden kann. Neben der Grundvorstellung der Tangentensteigung bilden die Schülerinnen und Schüler die Grundvorstellungen lokale Änderungsrate und lokale Linearität aus und setzen diese drei Grundvorstellungen zueinander in Beziehung. Anhand von vielfältigen innermathematischen Fragestellungen und Anwendungsbezügen gewinnen sie einen ersten Eindruck von der Tragweite der Differenzialrechnung.

Komplikation

Hühner rennen deshalb oft orientierungslos im Kreis herum, weil sie zu den wenigen Spezien der Glaxis gehören die bisher keine sinnvolle Möglichkeit gefunden haben ein Handtuch bei sich zu tragen.

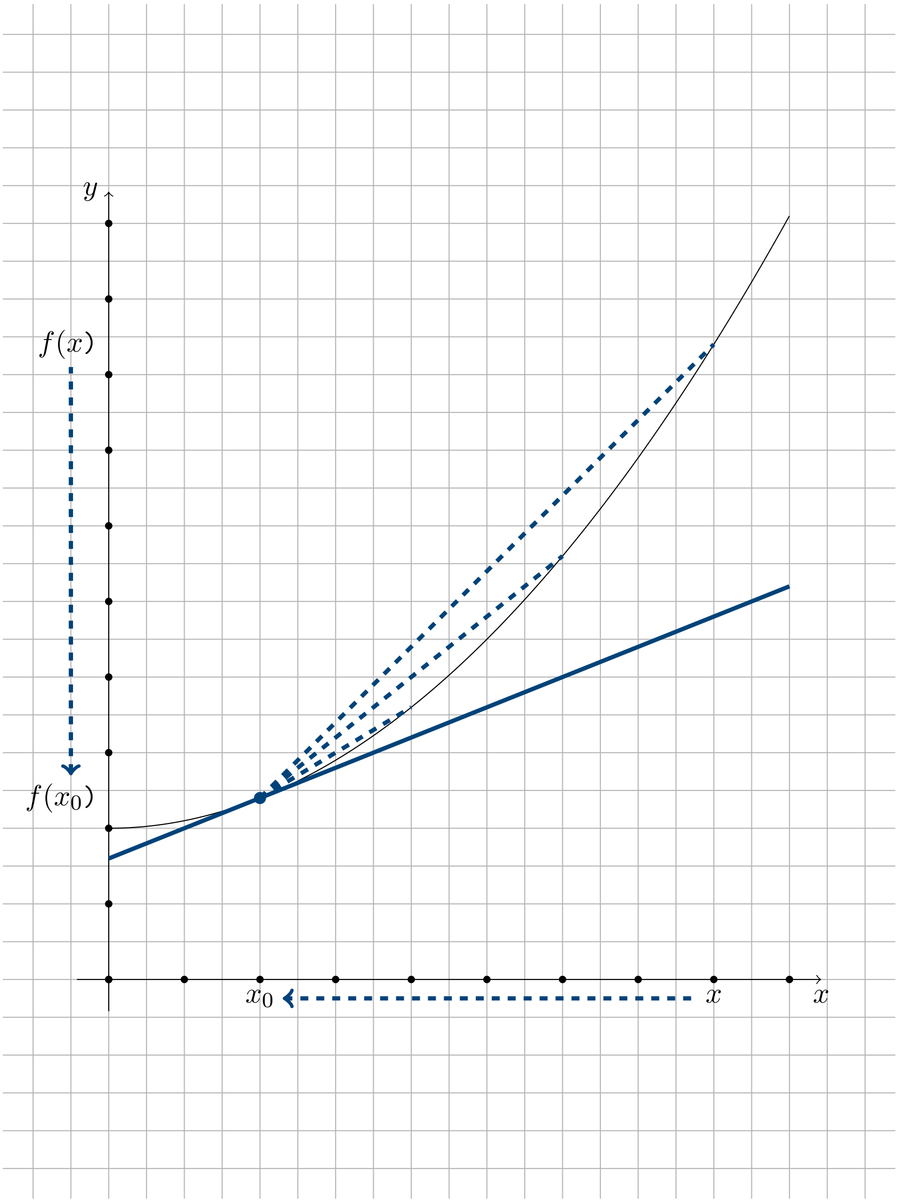
1 Ermittle experimentell den Funktionsgraphen, der die zurückgelegte Strecke eines Huhns abhängig von der Zeit modelliert.

2 Ermittle aus 1 den Funktionsgraphen, der die momentane Geschwindigkeit des Huhns abhängig von der Zeit modelliert.

3 Ermittle aus 2 den Funktionsgraphen, der die momentane Beschleunigung des Huhns abhängig von der Zeit modelliert.

1 Um die Steigung einer Kurve an einer Stelle x_0 zu berechnen definieren wir den Differentialquotient (die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0) durch:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$



2 Wir definieren die **Ableitungsfunktion** einer Funktion f als Funktion $f'(x)$, die alle x-Werte aus dem Definitionsbereich auf die Werte der Ableitungen von f abbildet. Wir ermitteln graphisch die Ableitungsfuntionen:

	$f(x)$	$f'(x)$
Potenziell:	x^r	$r \cdot x^{r-1}$
Exponentiell:	e^x	e^x
Logarithmisch:	$\ln(x)$	x^{-1}
Trigonometrisch:	$\sin(x)$	$\cos(x)$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

Die Ableitungsfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion wird im GAN nicht verlangt!

3 Mit Hilfe des Differentialquotienten ($a(x)$ und $b(x)$ sind differenzierbar, b; c; m; $r \in \mathrm{R}$ ermitteln wir die folgenden **Ableitungsregeln**:

	$f(x)$	$f'(x)$
Summenregel:	$a(x) + b(x)$	$a'(x) + b'(x)$
Faktorregel:	$c \cdot a(x)$	$c \cdot a'(x)$
Produktregel:	$a(x) \cdot b(x)$	$a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$
Kettenregel:	$a(b(x))$	$a'(b(x)) \cdot b'(x)$

Die innere Funktion der Verkettung ist im GAN immer linear!

4 Wir bezeichnen $F(x)$ dann und nur dann als Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Stammfunktionen sind nur bis auf einen konstanten Summanden $C \in \mathrm{R}$ eindeutig. Das umgekehrte Ermitteln der Ableitungsfunktion liefert für $m;\ c \in \mathrm{R}$ und $r \in \mathrm{R} \setminus -1$ die folgenden Regeln:

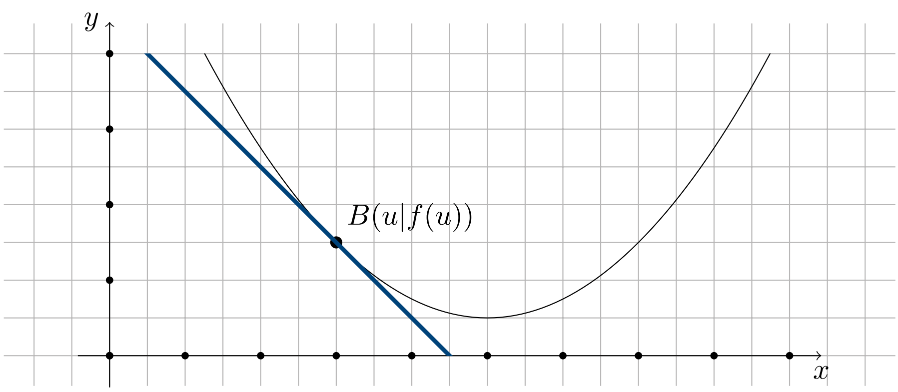
	$f(x)$	$F(x)$
Potenzregel:	x^r	$\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$
Summenregel:	$a(x) + b(x)$	$A(x) + B(x)$
Faktorregel:	$c \cdot a(x)$	$c \cdot A(x)$
Kettenregel:	$a(m \cdot x + c)$	$A(m \cdot x + c) \cdot \frac{1}{m}$

Die Stammfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion wird im GAN nicht verlangt!

Die Produktregel (eigentlich partielle Integration) sowie die allgemeine Kettenregel (eigentlich Substitution) werden in der Schulmathematik nicht behandelt

5 Wir bezeichnen eine Gerade t, die einen Funktionsgraph einer differenzierbaren Funktion f in einem Punkt $B(u|f(u))$ berührt als Tangente. Es gilt:

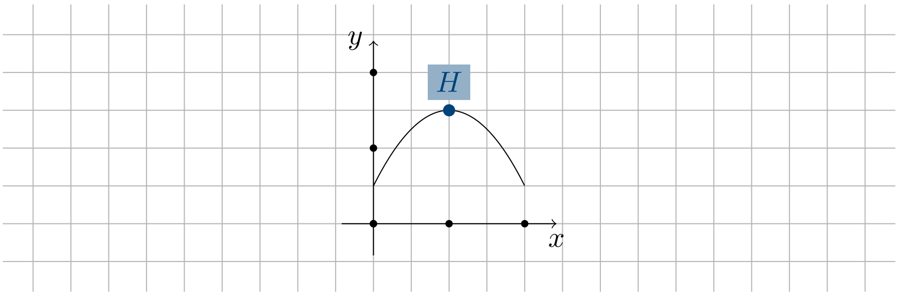
$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$



6 Wir ermitteln mit Hilfe von notwendigen (alternativ hinreichenden Bedingungen über einen Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion) Bedingungen besondere Punkte eines Funktionsgraphen der Funktion f an der Stelle x_0:

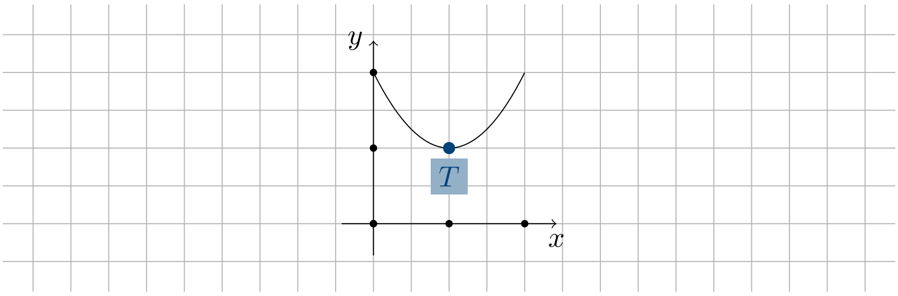
- Hochpunkt

$$f'(x_0) = 0; \qquad f''(x_0) < 0$$



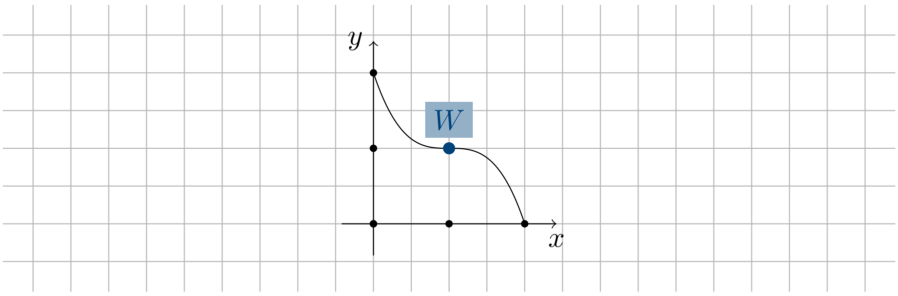
- Tiefpunkt

$$f'(x_0) = 0; \qquad f''(x_0) > 0$$



- Wendepunkt

$$f''(x_0) = 0; \qquad f'''(x_0) \neq 0$$

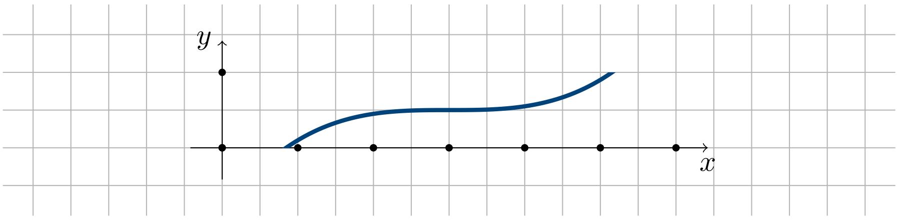


7

8 Wir ermitteln das Monotonieverhalten des Funktionsgraphen einer Funktion f mit Hilfe der Ableitungsfunktion und interpretieren Änderungsraten und Krümmungsverhalten sowie Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte von Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.

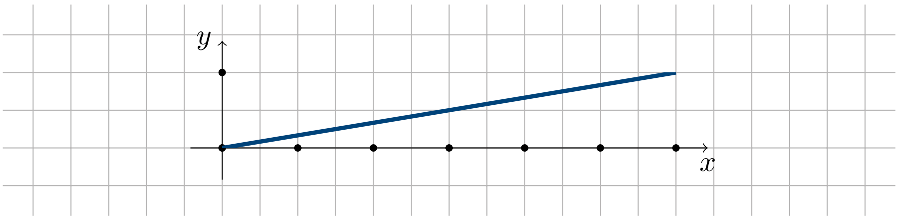
- Monoton steigend

$$f'(x) \geq 0$$



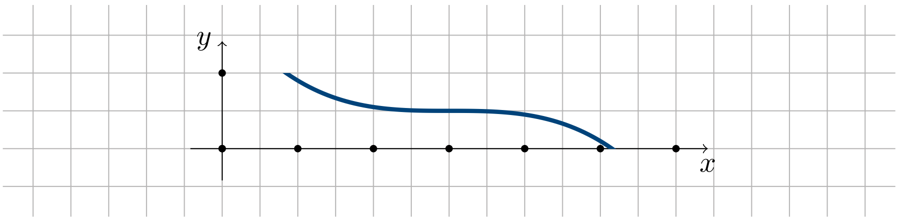
- Streng monoton steigend

$$f'(x) > 0$$



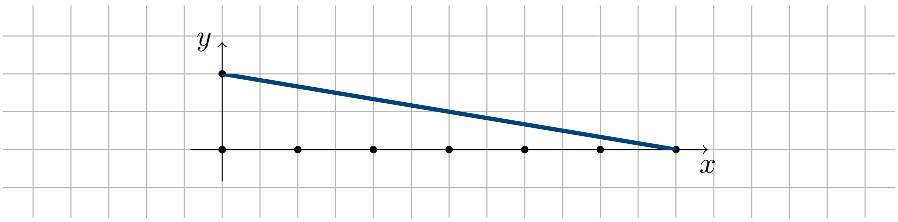
- Monoton fallend

$$f'(x) \leq 0$$



- Streng monoton fallend

$$f'(x) < 0$$



1 Untersuche was für $h \in \mathrm{R}$ und gelten muss, damit für $x = x_0$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1.1 Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die momentane Steigung des Funktionsgraphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$, wenn gilt:

$$f(x) = 0,5 \cdot x + 3$$

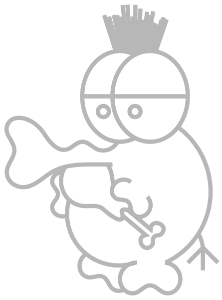
1.2 Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitungsfunktion f' von f, wenn gilt:

$$f(x) = x^2 + 42$$

1.3 Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitungsfunktion f' von f, wenn gilt:

$$f(x) = \sqrt{42 \cdot x}$$

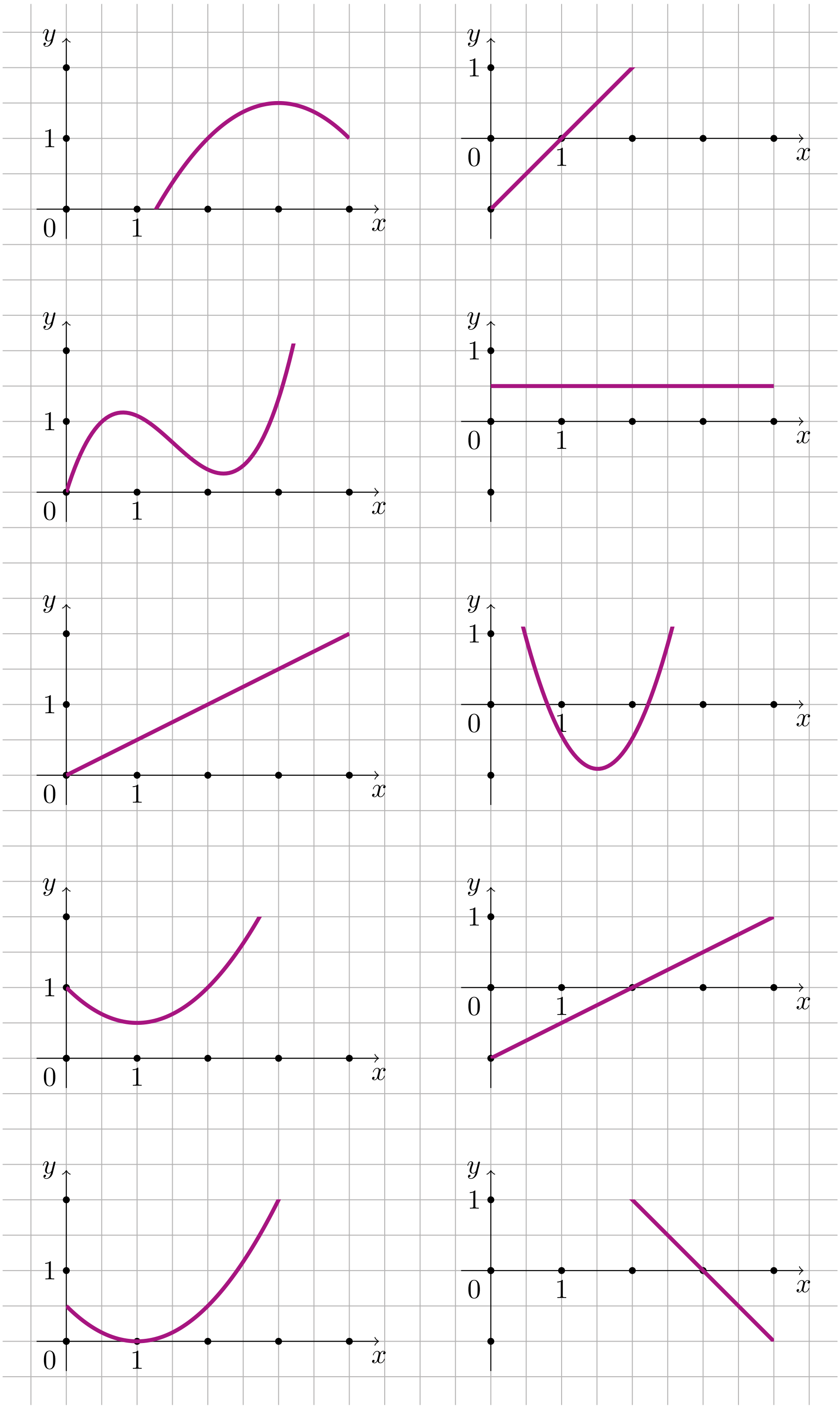
1.4 Der Schlegelefant denkt beim Schlegelessen über die Produktregel nach.



Zeige mit Hilfe des Differentialquotienten, dass die Produktregel gilt:

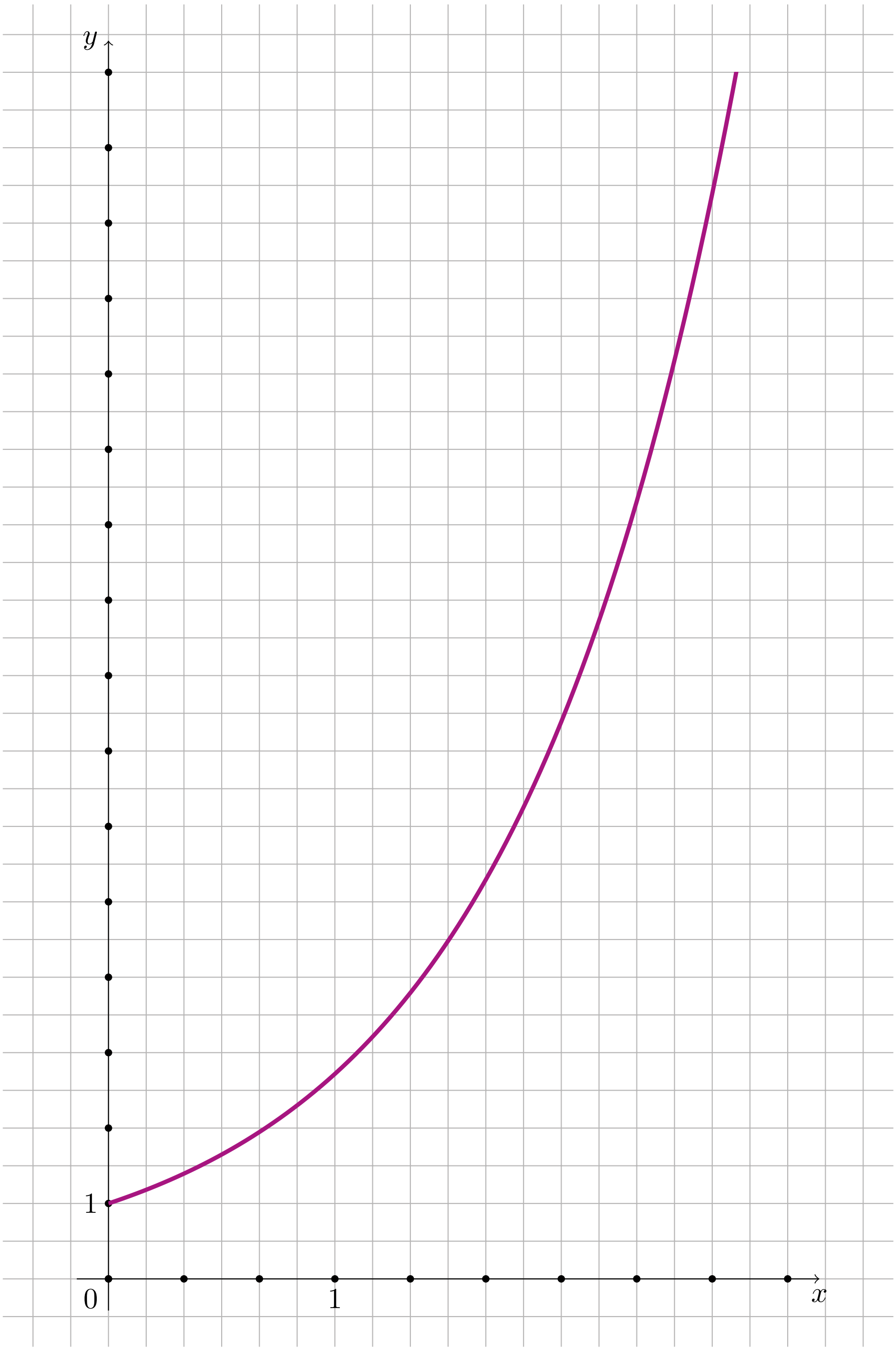
$$f(x) = a(x) \cdot b(x) \rightsquigarrow f'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$$

2 Gib an, welcher Funktionsgraph zu welchem Ableitungsgraph gehört.

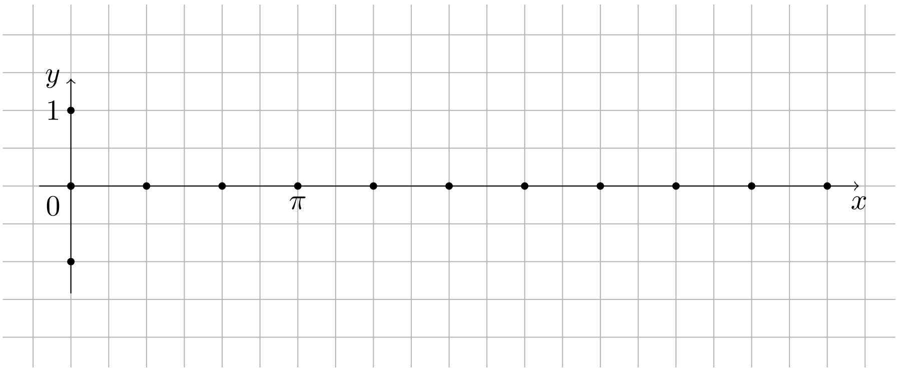


2.1 Ermittle zeichnerisch das Schaubild der Ableitungsfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

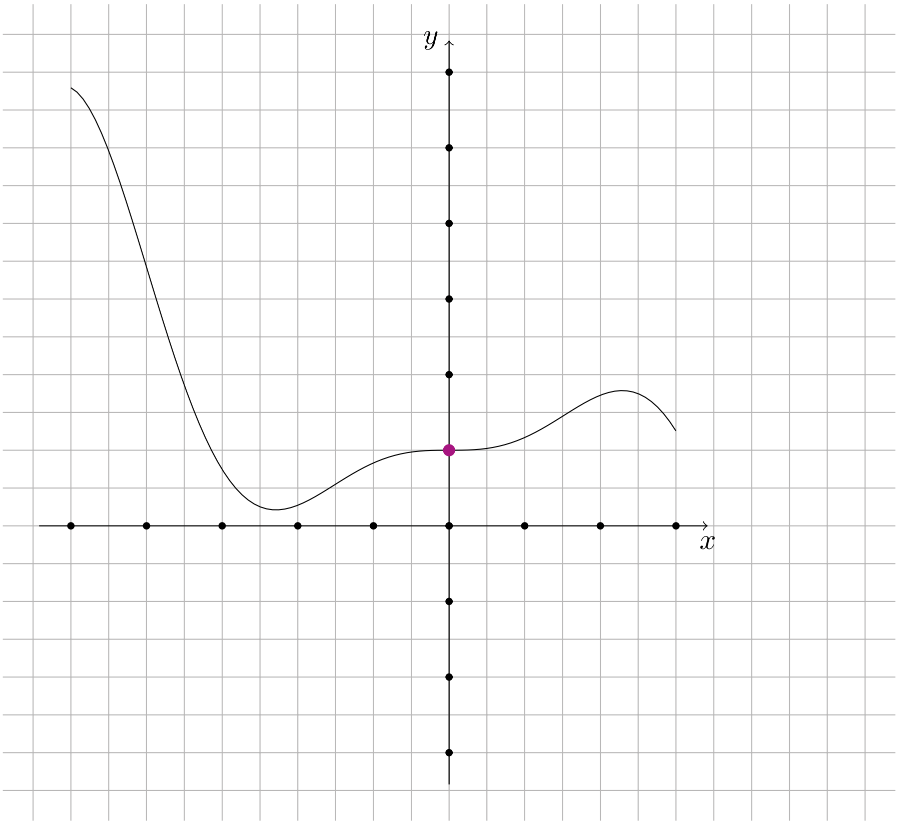
$$f(x) = e^x$$



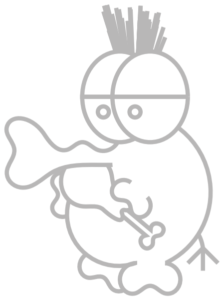
2.2 Erläutere zeichnerisch, warum die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion die Kosinusfunktion ist.



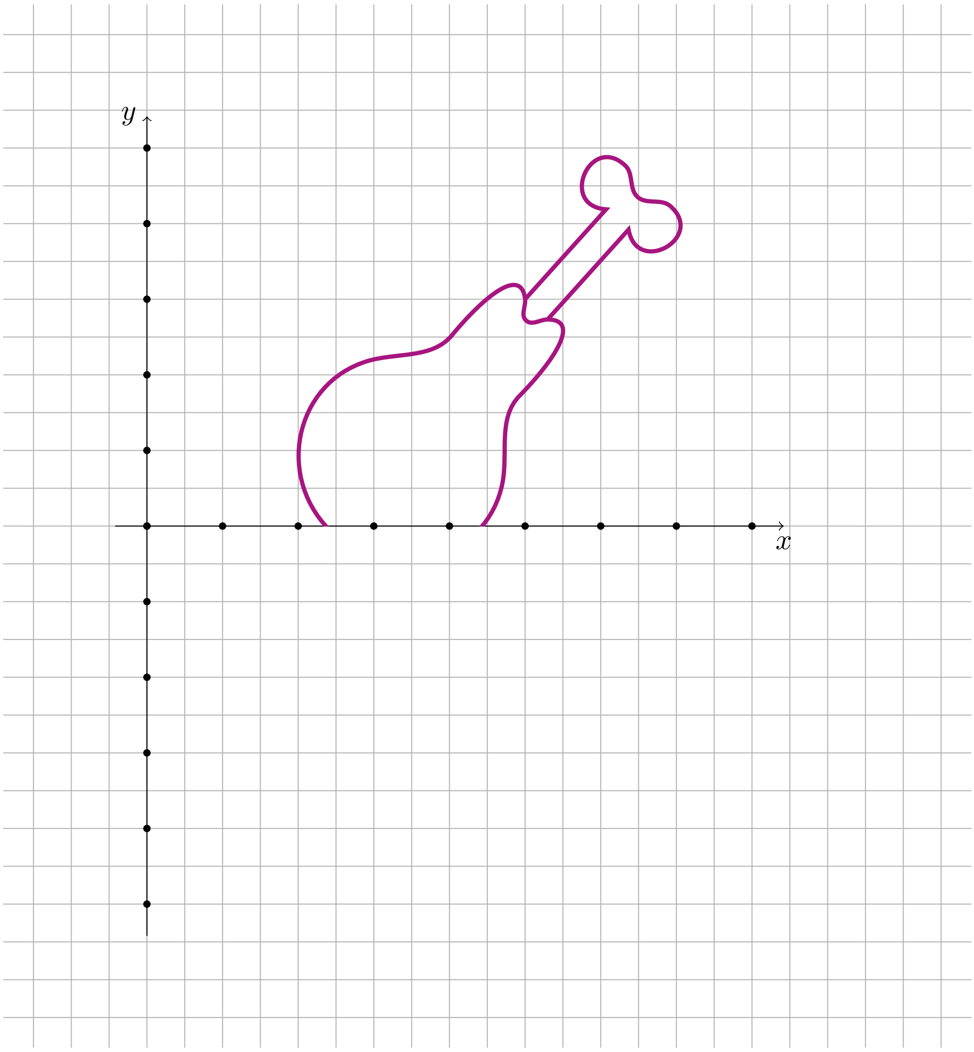
2.3 Das Schaubild modelliert den Längsschnitt eines Pferderrückens. Skizziere die Ableitungsfunktion und erläutere damit, welche hinreichenden Bedingungen für einen Sattelpunkt gelten müssen.



2.4 Der Schlegelefant leitet den Schlegel graphisch ab.



Ermittle Problemstellen und untersuche, welche Voraussetzungen für die Differenzierbarkeit einer (abschnittsweise definierten) Funktion gelten müssen.



3 Gib an, welche Funktionsterme und Ableitungsfunktionsterme zusammengehören.

$\sin(x)$	$7 \cdot x^6$
e^x	0
$x^2 + x^3$	42
$e^x \cdot x^2$	$\cos(x)$
$\sin(3 \cdot x)$	$2 \cdot x + 3 \cdot x^2$
$\ln(x)$	e^x
42	$e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2 \cdot x$
$42 \cdot x$	$-\sin(x)$
x^7	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$\cos(3 \cdot x) \cdot 3$

3.1 Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x^2 \\
b(x) &= x^2 + 5 \\
c(x) &= 5 \cdot x^2 \\
d(x) &= \sqrt{x} \\
e(x) &= 2 \cdot e^x \\
f(x) &= \sin(x) + 2 \\
g(x) &= \cos(x) + \sin(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^3 - 3 \cdot x \\
i(x) &= x^2 - 0,5 \cdot x + 32 \\
j(x) &= \sin(x) - 3 \cdot e^x \\
k(x) &= \sin(x)^2 + \cos(x)^2 \\
l(x) &= \ln(x) + e^x \\
m(x) &= 4 \cdot x^2 - 2 \cdot \cos(x) \\
n(x) &= 42 \cdot x + 42
\end{aligned}
$$

3.2 Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

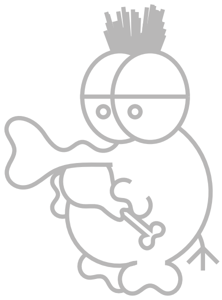
$$
\begin{aligned}
a(x) &= x \cdot \sin(x) & h(x) &= \sin(x^2) \\
b(x) &= \cos(x) \cdot x^2 & i(x) &= (\sin(x))^2 \\
c(x) &= e^x \cdot x & j(x) &= \cos(e^x) \\
d(x) &= (x+3) \cdot e^x & k(x) &= \ln(x^3) \\
e(x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) & l(x) &= (\sin(x)+1)^2 \\
f(x) &= (x^2+1) \cdot e^x & m(x) &= \sqrt{\cos(x)} \\
g(x) &= 2 \cdot \cos(x) \cdot x^2 & n(x) &= \sin(\cos(x))
\end{aligned}
$$

3.3 Gib jeweils die Ableitungsfunktion an.

$$
\begin{aligned}
a(x) &= x^2 \cdot e^{3\cdot x} \\
b(x) &= \sin(2\cdot x)\cdot x^2 \\
c(x) &= x \cdot e^x \cdot \sin(x) \\
d(x) &= \sqrt{x^3}\cdot \cos(x) \\
e(x) &= (\sin(x^2))\cdot x \\
f(x) &= (x^3 - 4\cdot x)\cdot e^{3\cdot x} \\
g(x) &= \cos(x^3)\cdot x^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \sqrt{x^2}\cdot x^2 \\
i(x) &= x^3 \cdot (x^3)^{-1} \\
j(x) &= (\sin(x) - x)\cdot(x + \sin(x)) \\
k(x) &= \sin(\pi)\cdot \pi \\
l(x) &= e^x \cdot (\sqrt{x})^{-1} \\
m(x) &= \tan(x) \\
n(x) &= \sin(x)^2 + \cos(x)^2
\end{aligned}
$$

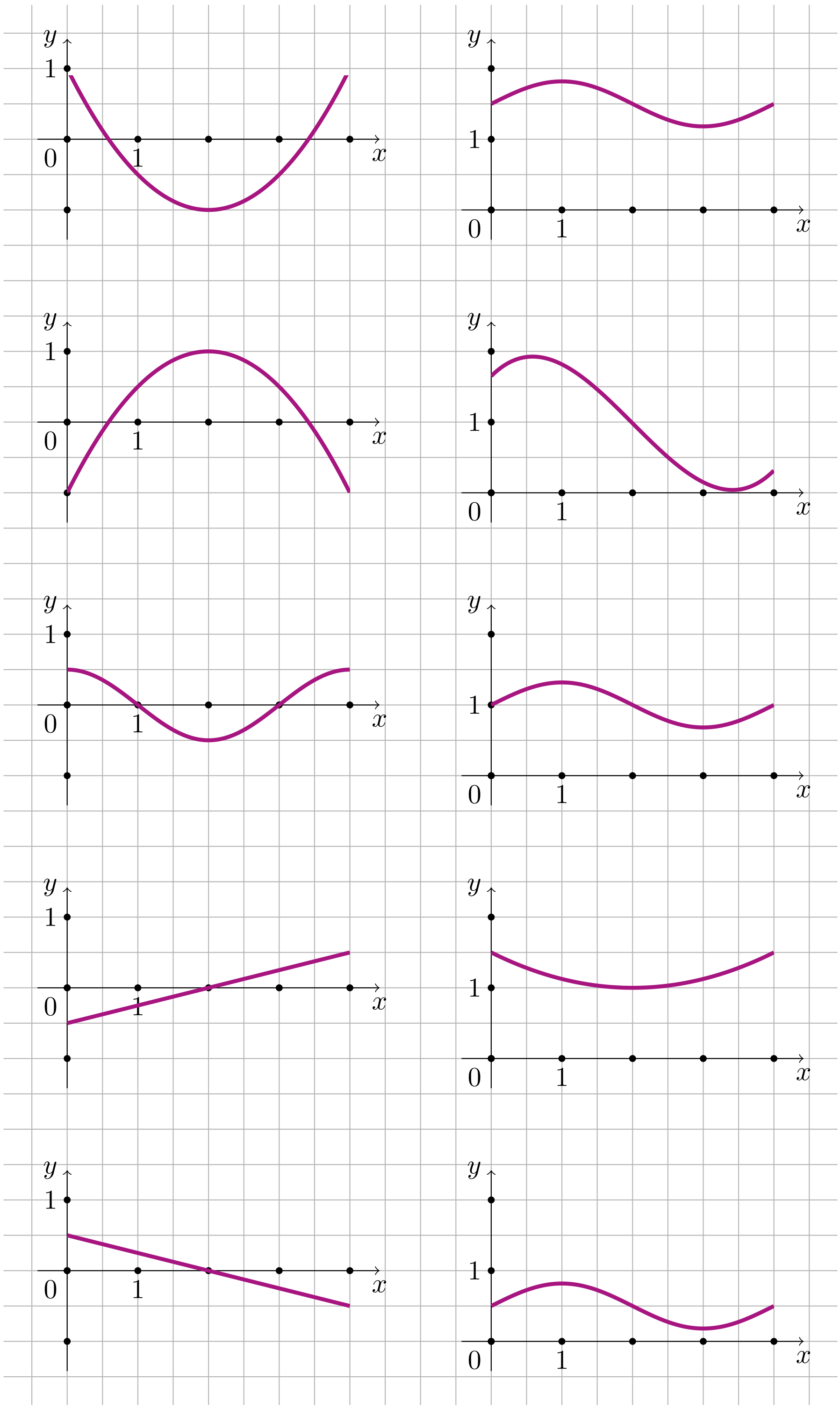
3.4 Der Schlegelefant denkt beim Schlegelessen über eine mögliche Quotientenregel nach.



Zeige mit Hilfe der Produktregel und der Kettenregel, dass gilt:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{(b(x))^2}$$

4 Gib an, welcher Funktionsgraph zu welchem Stammgraph gehört.



4.1 Gib jeweils eine mögliche Stammfunktion an.

$a(x) = x^2$

$b(x) = x^3 + x$

$c(x) = x^2 - x + 1$

$d(x) = \sqrt{x} + e^x$

$e(x) = \sin(x) + \cos(x)$

$f(x) = \sin(2 \cdot x + 3)$

4.2 Gib jeweils alle möglichen Stammfunktionen an.

$a(x) = x^4$

$b(x) = x^3 + \sqrt{x}$

$c(x) = e^{2 \cdot x + 3}$

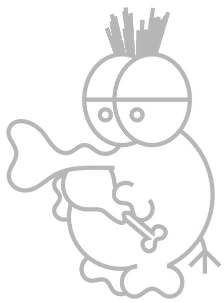
$d(x) = \sin(2 \cdot x)$

$e(x) = \cos(4 - 2 \cdot x)$

$f(x) = (42^{-1} \cdot x)^{41}$

4.3 Ermittle jeweils die Stammfunktion, die durch $P(42|42)$ geht.
$a(x) = (2 \cdot x - 4)^3$; $b(x) = 2 \cdot e^{x-5}$; $c(x) = \cos(2 \cdot x - 3) + 1$

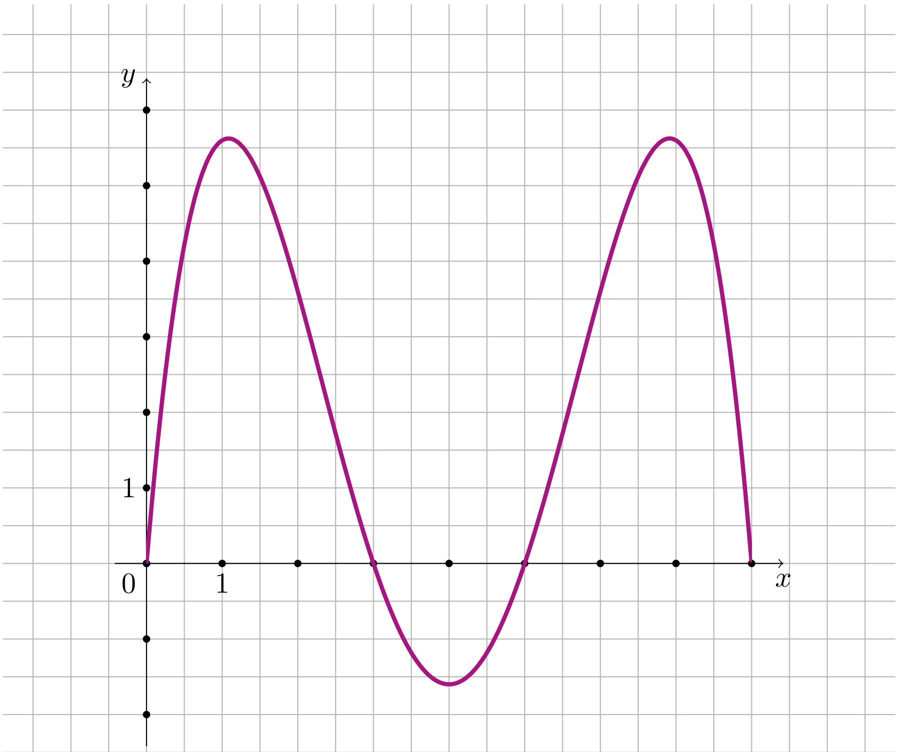
4.4 Der Schlegelefant schneidet den Hähnchenschlegel quer durch.

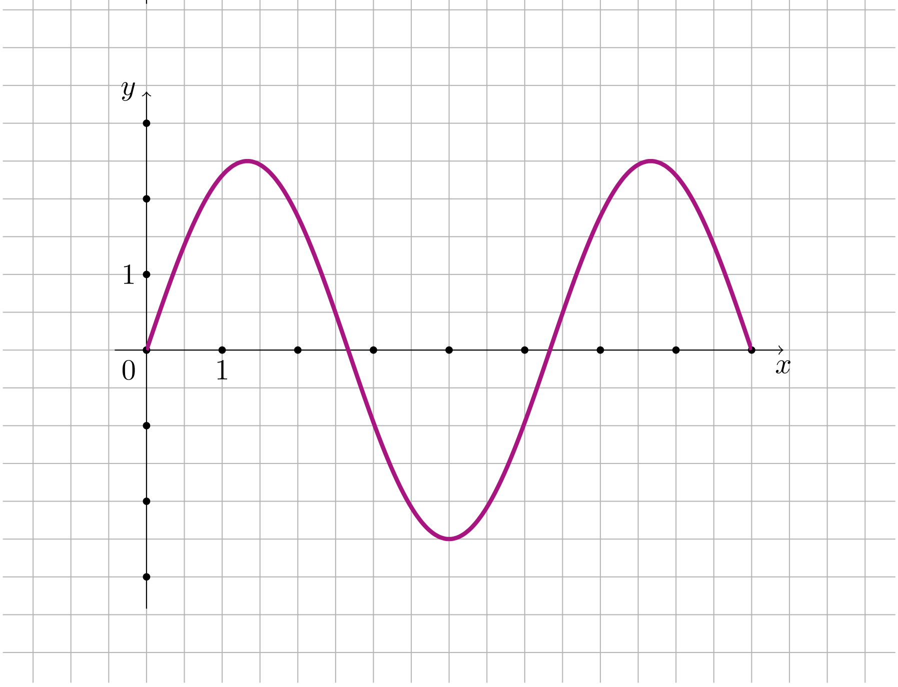


Er modelliert den halben Querschnitt mit Hilfe des Funktionsgraphen von f. Berechne $F(2)$ und $F(2)$ und ermittle, wie diese Werte mit der Querschnittsfläche in Verbindung stehen, wenn gilt:

$$f(x) = -x^2 + 4$$

5 Ermittle jeweils zeichnerisch den Schnittpunkt der Tangenten, die den Funktionsgraph an den Stellen $x_1 = 5$ und $x_2 = 2$ berühren.



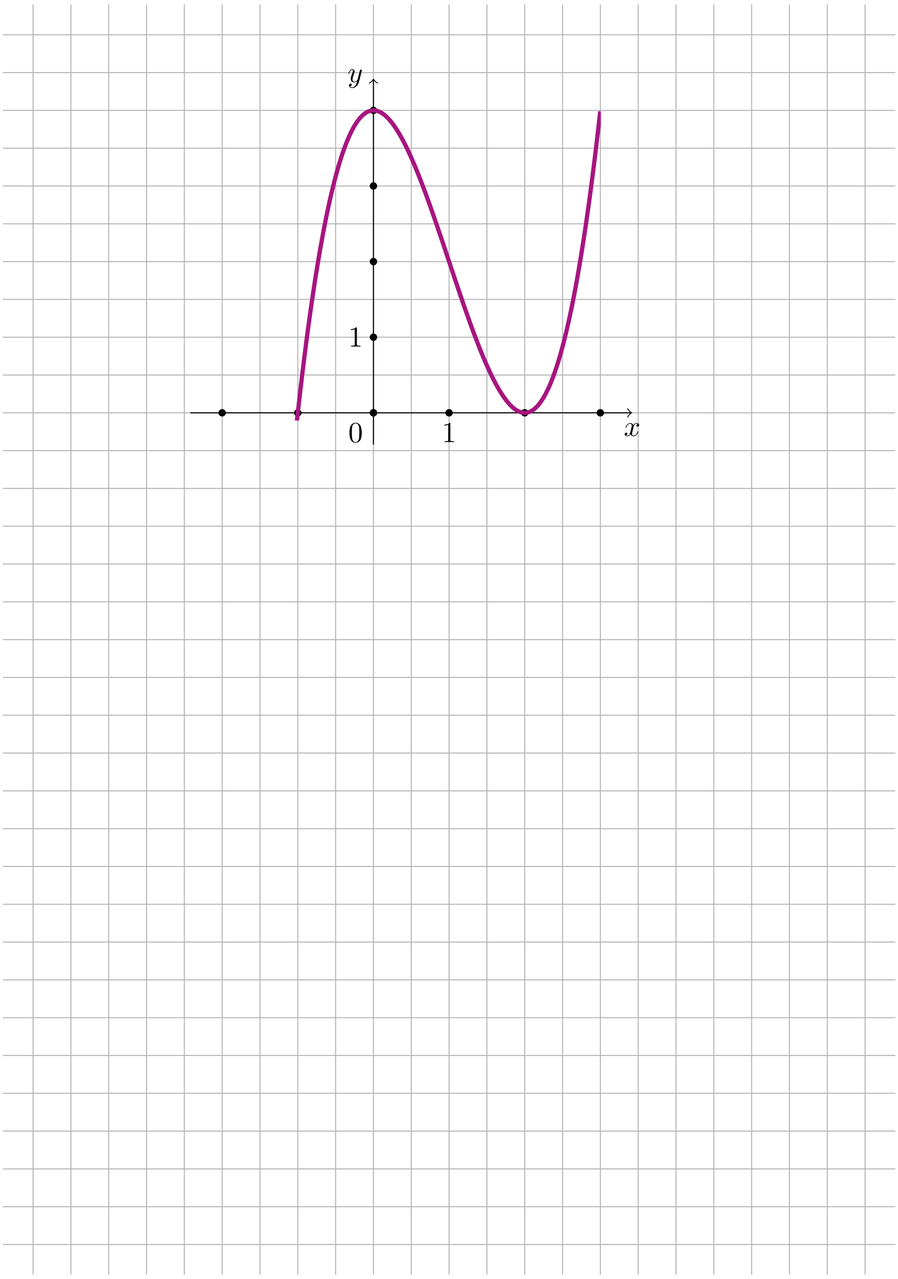


5.1 Berechne jeweils die Tangente an den Berührpunkt $P(1|f(1))$.
Skizziere jeweils den Sachverhalt für $0 \leq x \leq 2$.

$$a(x) = -x \cdot (x-3)^2; \qquad b(x) = \sin(x); \qquad c(x) = e^x$$

5.2 Ermittle die zum Schaubild passende Funktionsgleichung einer Polynomfunktion. Untersuche zeichnerisch und rechnerisch, welche der angegebenen Geraden eine Tangente an das Schaubild sind.

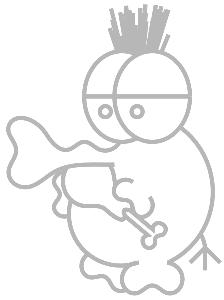
$$t_1 : y = 0 \cdot x + 4; \qquad t_2 : y = -4 \cdot x + 6; \qquad t_3 : y = 8 \cdot x + 7$$



5.3 Berechne die Schnittpunkte aus **5**, wenn der erste Funktionsgraph zu einer Polynomfunktion vierten Grades und der zweite Funktionsgraph zu einer trigonometrischen Funktion gehört.

Taschenrechner erlaubt!

5.4 Der Schlegelefant denkt beim Schlegelessen über die Produktregel nach.



Ermittle, warum sich eine Tangente t, die einen Funktionsgphen einer Funktion f am Berührpunkt $B(u|f(u))$ berührt, berechnen lässt durch:

$$t : y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

6 Gib an, wo sich die besonderen Punkte jeweils im Funktionsgraphen von f im Intevall $[-5;\ 5]$ befinden und welche Eigenschaften für f; f'; f'' und f''' sich daraus jeweils ergeben.

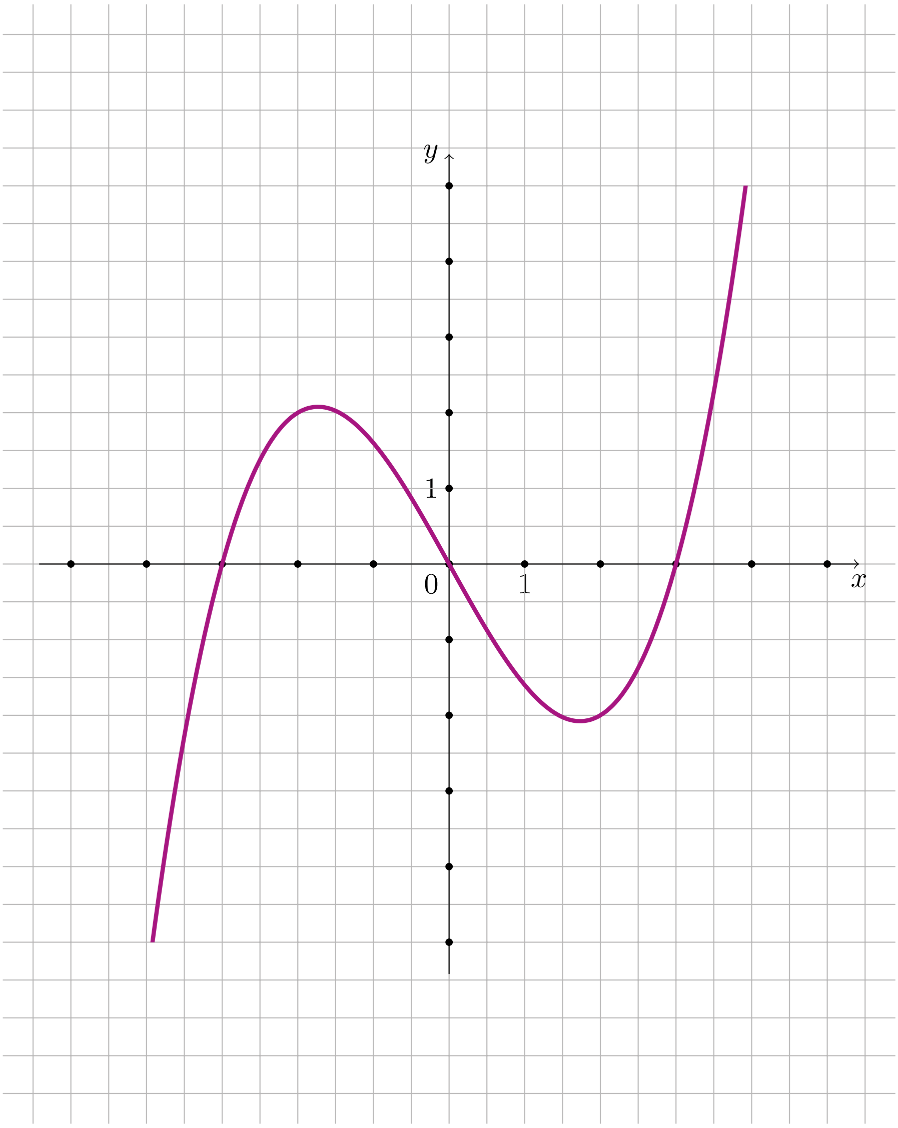
6.1 Globales Maximum

6.2 Globales Minimum

6.3 Hochpunkt

6.4 Tiefpunkt

6.5 Wendepunkt



6.1 Skizziere jeweils das Schaubild für $0 \leq x;\ \ y \leq 3$. Ermittle zeichnerisch jeweils den besonderen Punkt und überprüfe dein Ergebnis rechnerisch.

Taschenrechner erlabut!

$$a(x) \ = -x^2 + 3 \cdot x - 1,75$$

$$b(x) \ = x^2 - 3 \cdot x + 2,75$$

$$c(x) \ = x^3 - 4,5x^2 + 6,75 \cdot x - 1,875$$

6.2 Untersuche mit Hilfe des Schaubildes von f die Aussage 'Zwischen zwei Tiefpunkten liegt immer ein Hochpunkt', auf ihren Wahrheitsgehalt, wenn gilt:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2}{x^2}$$

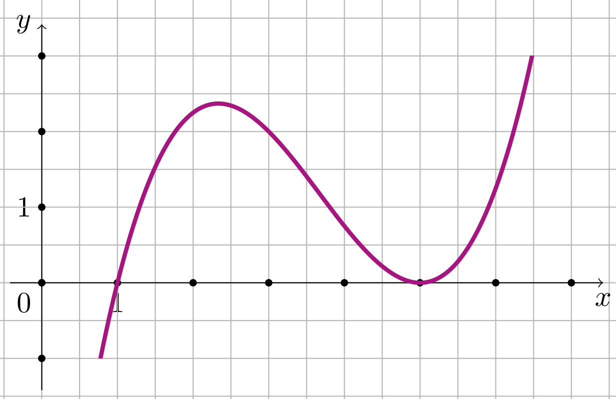
6.3 Gegeben ist der Funktionsgraph der Ableitungsfunktion von f. Untersuche die Aussage jeweils auf ihren Wahrheitsgehalt.

6.3.1 Das Schaubild von f hat an der Stelle $x = 5$ einen Tiefpunkt.

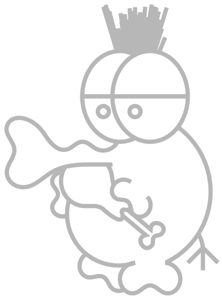
6.3.2 Das Schaubild von f hat an der Stelle $x = 1$ einen Tiefpunkt.

6.3.3 Das Schaubild von f hat im Intervall $[1; 6]$ zwei Wendepunkte.

6.3.4 Das Schaubild von f'' hat im Intervall $[3; 4]$ eine Nullstelle.



6.4 Der Schlegelefant denkt beim Schlegelessen über den Unterschied zwischen hinreichenden und notwendingen Bedingungen nach.



Erläutere mit Hilfe der Funktion f die Relevanz von notwendigen Bedingungen bei der Extremwert berechnung, wenn gilt:

$$f(x) = x^4$$

7 Gib die Stellen des Geschwindigkeitsverlaufes an, an denen die beschriebene Eigenschaft jeweils erkennbar ist.

7.1 Die Anfangsgeschwindigkeit.

7.2 Die Geschwindigkeit steigt.

7.3 Die Geschwindigkeit sinkt.

7.4 Maximale Geschwindigkeit.

7.5 Minimale Geschwindigkeit.

7.6 Negative Geschwindigkeit.

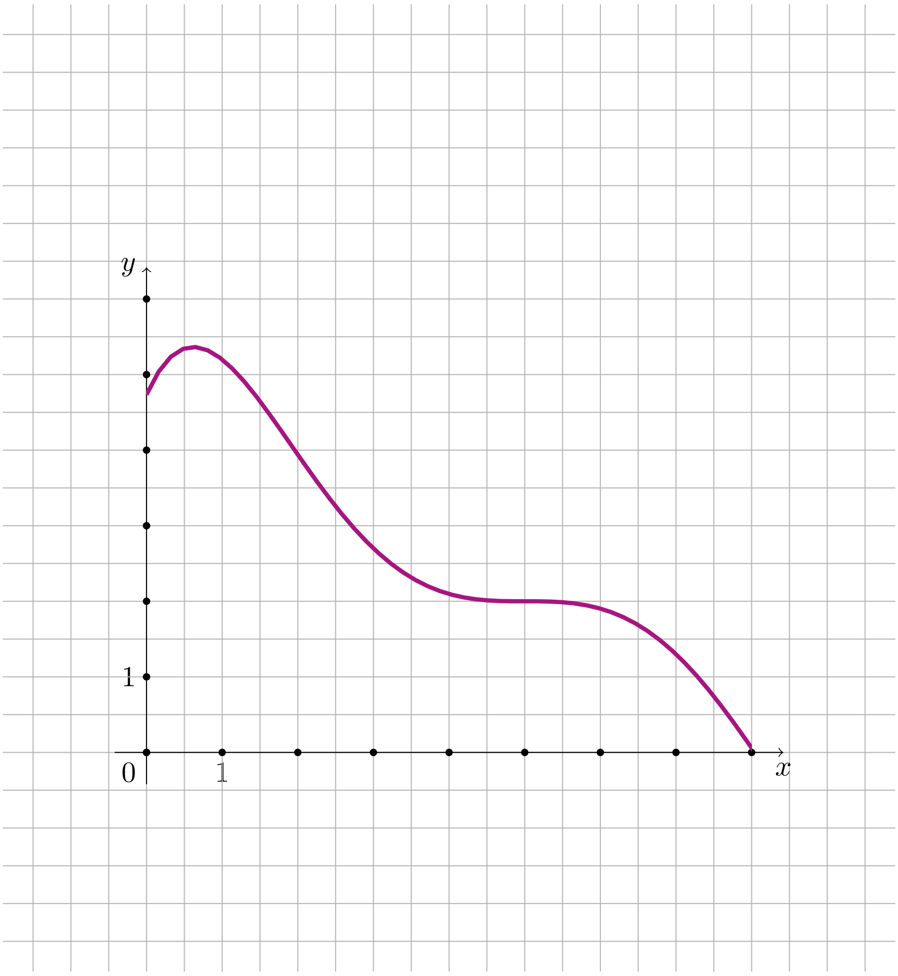
7.7 Die Beschleunigung ist bei 0.

7.8 Die Beschleunigung ist maximal.

7.9 Die Beschleunigung ist minimal.

7.10 Positive Beschleunigung.

7.11 Negative Beschleunigung.



7.1 Untersuche das Monotonieverhalten von f, wenn gilt:

$$f(x) = x \cdot (x - 42)^2$$

7.2 Gib jeweils eine Funktionsgleichung an, deren zugehöriger Funktionsgraph die angebgenen Eigenschaften hat.

7.2.1 Exponentialfunktion, streng monoton fallend.

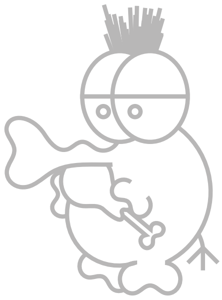
7.2.2 Trigonometrische Funktion, monoton steigend in $[0;\ 42]$

7.2.3 Polynomfunktion dritten Grades, streng monoton fallend.

7.3 Ermittle rechnerisch das Monotnoieverhalten von f für $D = \mathrm{R}$, wenn gilt:

$$f(x) = e^x \cdot x^2$$

7.4 Die Schlegelefant grillt ein Huhn.



Das Huhn wird um 13 Uhr Mittags auf den Grill gehängt. Die Gartemperatur lässt sich innerhalb der folgenden drei Stunden darstellen durch die Funktion g mit:

$$g(t) = 10 \cdot (t - 1,5)^3 + 50$$

(t in Stunden; $g(t)$ in Grad Celsius)

Skizziere den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Gib die Anfangs-und die Endtemperatur an. Gib die Gartemperatur um $13:30$ Uhr an. Berechne alle relevanten besonderen Punkte und interpretiere den Funktionsverlauf im Sachzusammenhang.

Katastrophe

1 Berechne $f'''(x)$, wenn gilt:

$$f(x) = 7 \cdot x^3 + x^2 - 7$$

2 Bestimme die Fläche, die die Wendetangente von f mit den Koordinatenachsen einschließt, wenn gilt:

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{14} \cdot x + 3$$

3 Ermittle die Wendenstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) = (x - (40 + \sqrt{2}))^2 \, e^{-(x-(40+\sqrt{2}))}$$