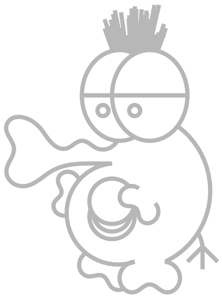
Exposition

Oreokeksle ~~Mathe~~ liebsch



12.10.Trigofunktionierung

Die Schülerinnen und Schüler definieren den Sinus und den Kosinus eines Winkels am Einheitskreis und erweitern damit ihre Kenntnisse der Trigonometrie. Sie entdecken die trigonometrischen Funktionen zur Mathematisierung periodischer Vorgänge und lernen die Eigenschaften der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion kennen. Darüber hinaus übertragen die Schülerinnen und Schüler bekannte Lösungsstrategien auf trigonometrische Gleichungen.

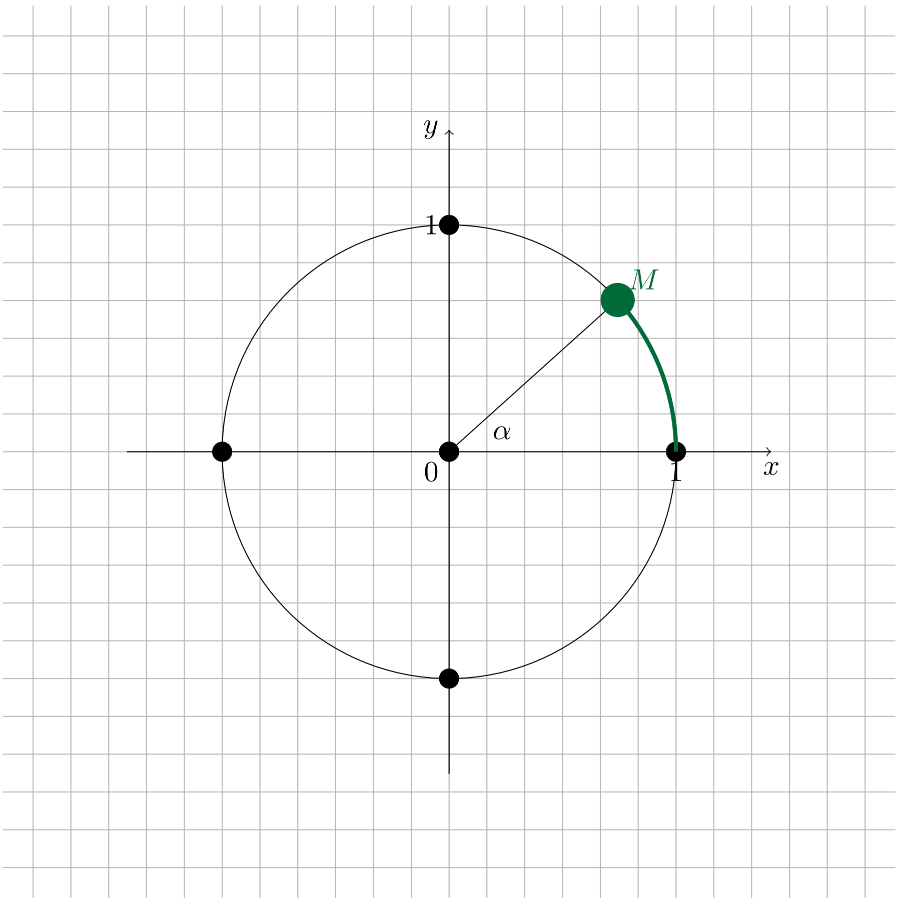
Komplikation

Die Galaxie, ein chaotisch organisiertes Durcheinander aus Sternen, Bürokratie und gelegentlich explodierenden Sonnensystemen, hat stets ihre eigenen Regeln, und eine davon besagt, dass man niemals ohne Handtuch reisen sollte - nicht etwa, weil es einem das Leben rettet, sondern weil man damit Müggle, die notorisch schlechte Reisedokumente besitzen, wodurch sie grundsätzlich nur auf Oreokeksen landen, damit vertreiben kann.

Berechne die Koordinaten der als Punkt modellierten Mugge M und die Länge des Kreisbogens auf dem abgebildeten kreisförmigen Oreokeks, wenn gilt:

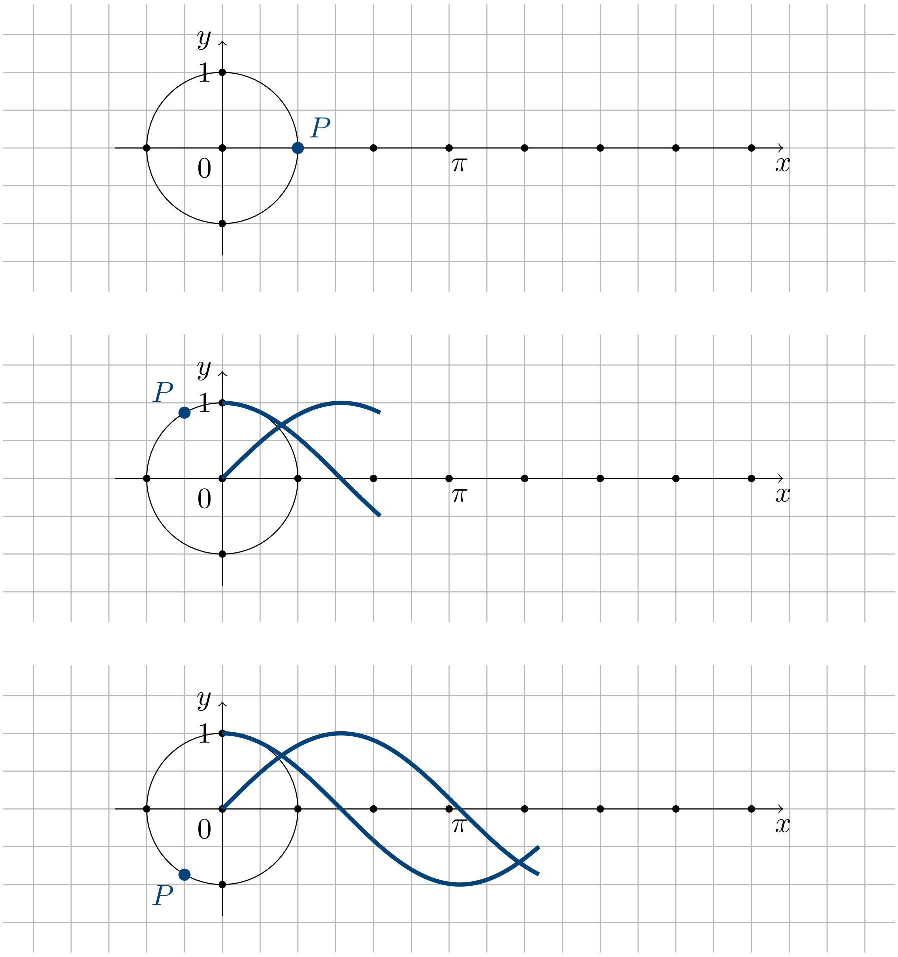
Taschenrechner erlaubt!

$$\alpha = 42°$$



1 Wir definieren mit dem Definitionsbereich $D = \mathrm{R}$ und dem Wertebereich $W = [-1;\ 1]$ mit den Koordinaten eines (gegen den Uhrzeigersinn laufenden) Punktes P auf dem Einheitskreis die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion :

- Die x-Koordinate von P abhängig vom zurückgelegten Kreisbogen / Winkel ist die Kosinusfunktion.
- Die y-Koordinate von P abhängig vom zurückgelegten Kreisbogen / Winkel ist die Sinusfunktion.



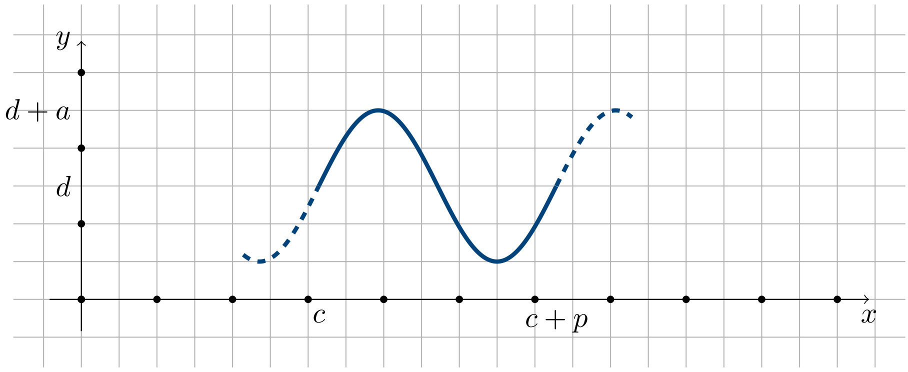
Wir bezeichnen den maximalen Abstand der Funktionsgraphen zur x-Achse als Amplitude und den Abstand zweier Hochpunkte als Periode . Sinus-und Kosinusfunktion sind Achsensymmetrisch zu den senkrechten Achsen durch ihre Extrempunkte und Punktsymmetrisch zu ihren Nullstellen.

2

3

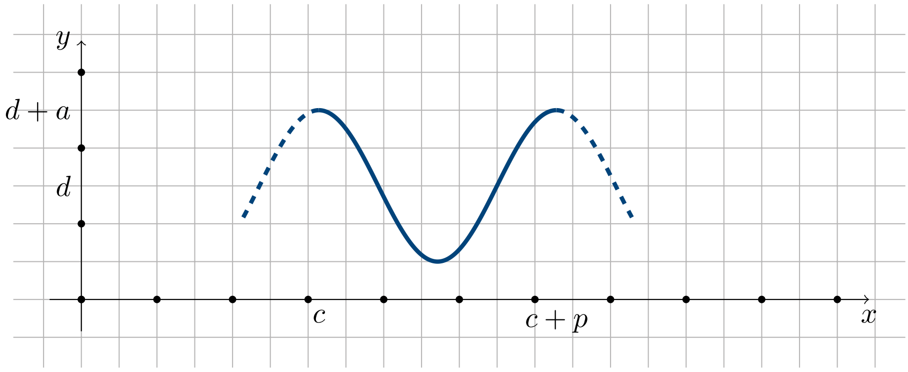
4 Wir definieren die allgemeine Sinusfunktion:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d; \qquad p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$$



Wir definieren die allgemeine Kosinusfunktion:

$$f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d; \qquad p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$$



5

6 Wir lösen trigonometrische Gleichungen durch:

- Substitution von $\sin()$ oder $\cos()$
- Übliche Lösungsverfahren anwenden
- Rücksubstitution mit $\arccos()$ und $\arcsin()$

Wir übertragen das Lösen von trigonometrischen Gleichungen auf Anwendungen.

1 Skizziere die Schaubilder von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ für $0 \leq x \leq 2 \cdot \pi$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

Gib an, welches Gradmaß zu welchem Bogenmaß gehört.

$1,5 \cdot \pi$

$270°$ $90°$

$0,25 \cdot \pi$

$0,5 \cdot \pi$ 0

$0°$ $135°$

$45°$ $45°$ $42 \cdot \pi$

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$. Das Schaubild von f sei S und das Schaubild von g sei C. Entscheide jeweils, ob die angegebene Aussage wahr ist.

1.1.1 Die Amplitude von S und C beträgt 1

1.1.2 Die Periodenlänge von S und C beträgt π.

1.1.3 C ist symmetrisch zur x-Achse.

1.1.4 S ist Punktsymmetrisch zum Ursprung.

1.1.5 S hat keine Achsensymmetrien.

1.1.6 S und C haben beide den Wertebereich $W = (-1;\ 1)$.

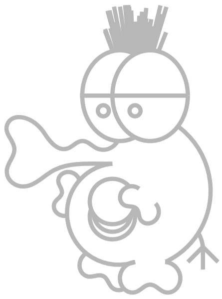
1.1.7 S und C haben beide den Definitionsbereich $D = \mathrm{Q}$.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ und g mit $g(x) = \cos(x)$. Das Schaubild von f sei S und das Schaubild von g sei C. Untersuche zeichnerisch die Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt: 'Die Flächenstücke die von S und C eingeschlossen werden, sind jeweils kleiner als $2 \cdot \pi$.'

1.3 Untersuche die Aussage für $x \in \mathrm{R}$ auf ihren Wahrheitsgehalt:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

1.4 Der Oreokekslefant rechnet mühsam das Bogenmaß in das Gradmaß um.



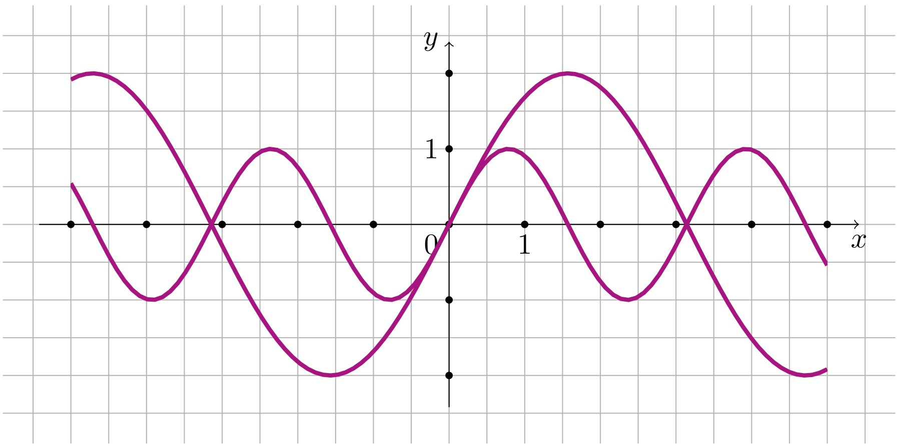
Ermittle eine Formel, mit der sich das Bogenmaß x in das Gradmaß α umrechnen läßt.

2

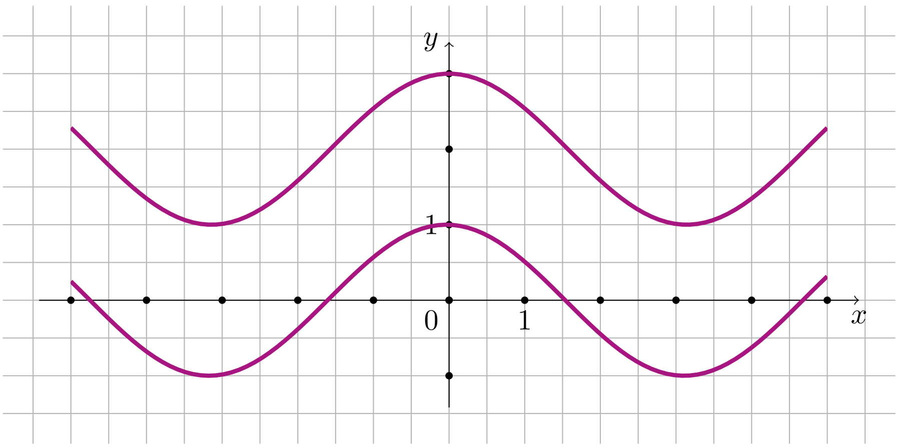
3

4 Gib jeweils an, welches Schaubild zu welcher Funktionsgleichung gehört.

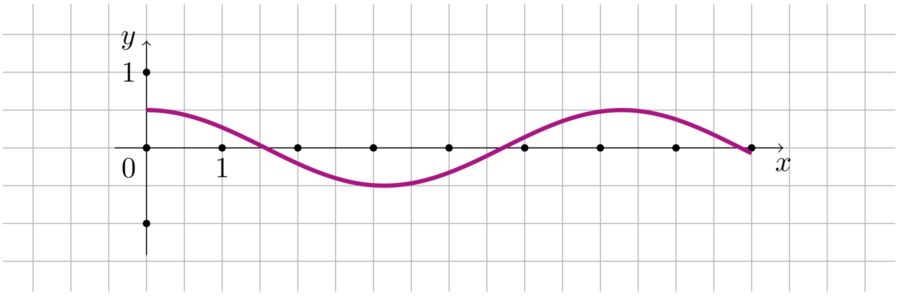
$a(x) = 2 \cdot \sin(x); \qquad b(x) = \sin(2 \cdot x)$

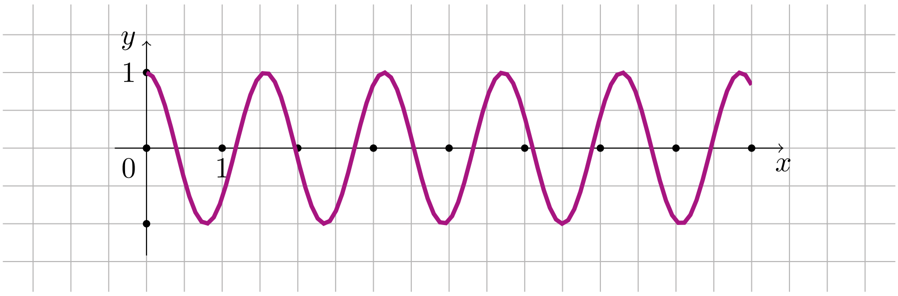


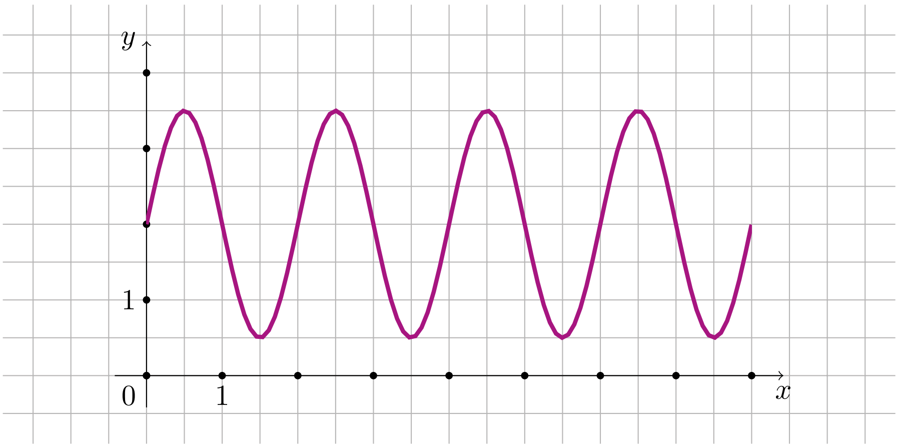
$c(x) = \cos(x+2); \qquad d(x) = \cos(x) + 2$



4.1 Gegeben ist jeweils das Schaubild einer trigonometrischen Funktion. Gib jeweils einen möglichen zugehörigen Funktionsterm an. Gib zu den angebenenen Funktionstermen jeweils den Wertebereich, die Amplitude, die Periodenlänge und einen Extrempunkt an.





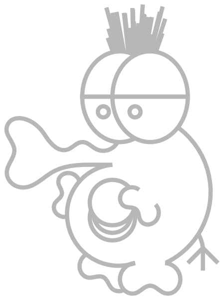


4.2 Skizziere jeweils das Schaubild mit Periodenlänge $p \in \mathrm{R}$ für $0 \leq x \leq p$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

$$a(x) = \sin(2 \cdot \pi \cdot x) + 1$$
$$b(x) = 2 \cdot \cos(x - 3)$$
$$c(x) = 4 \cdot \sin(\pi \cdot (x + 1)) + 2$$
$$d(x) = \sin(\pi - x) \cdot \pi$$
$$e(x) = -2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$$
$$f(x) = -3 \cdot \cos(\pi x - \pi) + 0{,}5$$

4.3 Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = \cos(\sin(\pi))$ in ein geeignetes Koordinatensystem mit $0 \leq x \leq 42$.

4.4 Der Oreokekslefant will die Oreokekslefantin heiraten



Der Ehering soll bei einem Radius von einer Längeneinheit und einer Breite von einer halben Längeneinheit eine knickfreie umlaufende Sinuskurve eingraviert bekommen.
Ermittle einen möglichen Funktionsterm für die Gravurkurve.

5

6 Ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichung mit dem angegebenen Lösungsverfahren.

$\sin(2 \cdot x) = 1;$ Substitution

$(\cos(x) - 42) \cdot (\sin(x) - 42) = 0;$ Satz vom Nullprodukt

$\sin(x)^2 + 3 \cdot \sin(x) - 4 = 0;$ Mitternachtsformel

6.1 Gib jeweils die Lösungsmenge der Gleichung an.

6.1.1 $\cos(x) = 1$

6.1.2 $\sin(x) = 0$

6.1.3 $\cos(x) = -1$

6.1.4 $2 \cdot \sin(x) + 1 = 3$

6.1.5 $\sin(x) + \sin(x) = 3$

6.1.6 $4 \cdot \cos(x) + 2 = 2$

Taschenrechner erlaubt!

6.2 Ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichung.

6.2.1 $(\sin(x) - 2) \cdot (\sin(x) + 1) = 0$

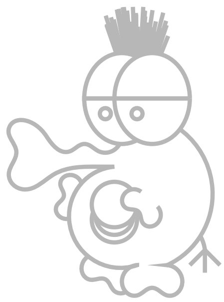
6.2.2 $\sin(x)^2 - 2 \cdot \sin(x) = 0$

6.2.3 $2 \cdot \cos(x)^2 + \cos(x) - 3 = 0$

6.3 Gib abhängig von $t \in \mathrm{R}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung an.

$$0 = t \cdot \sin(x) + 3$$

6.4 Der Oreokekslefant isst ein Oreokeks und denk dabei über Sinus und Kosinus nach.



Berechne exakt eine Lösung der Gleichung:

$$\sin(x) = \cos(x)$$

Katastrophe

Taschenrechner erlaubt!

1 Ermittle den Wert von $0,733038285837...$ im Gradmaß.

2

3

4 Ermittle $a \in \mathrm{R}$, sodass das Schaubild von f mit

$$f(x) = a \cdot \sin(x) + 58$$

zur Wertetabelle passt:

x	0	$0,5 \cdot \pi$	π	$1,5 \cdot \pi$
$f(x)$	58	100	58	16

5

6 Berechne die Lösung der Gleichung für $x \in [0;\ 100]$.

$$\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{168} \cdot x\right) = 2 \cdot \sin(168 \cdot \pi)$$