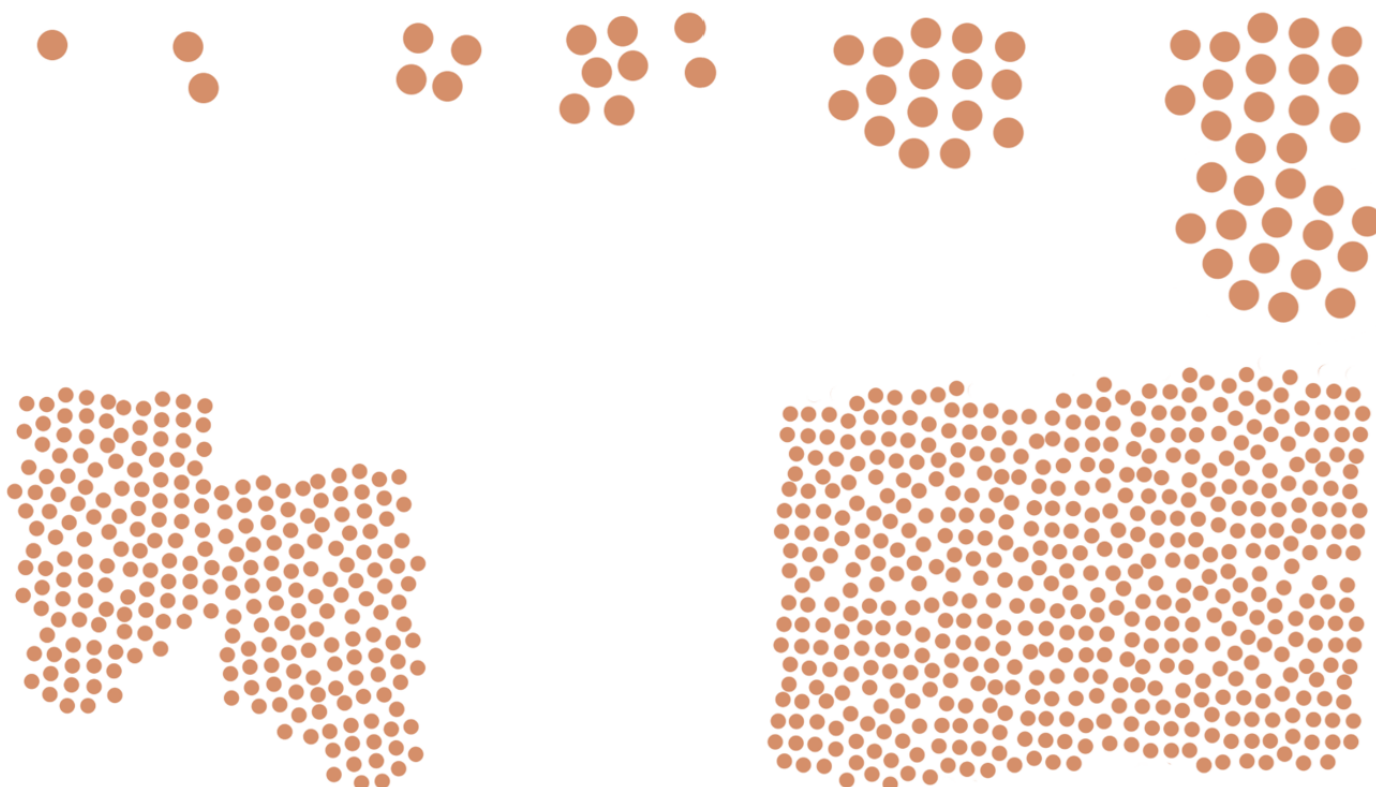


Die Exponentialfunktion

„Jeder, der glaubt, exponentielles Wachstum kann in einer endlichen Welt für immer weitergehen, ist entweder ein Verrückter oder ein Ökonom (Wirtschaftswissenschaftler)“

Kenneth Boulding (Ökonom)



Komplikation 1

Maren ist gerade 16 geworden, weiß aber schon, dass sie sich zu ihrem 18. Geburtstag ein Auto wünscht. Ihr Vater schlägt vor jeden Monat 200€ für sie zur Seite zu legen und ihr das Geld in zwei Jahren auszuzahlen. Maren denkt kurz nach und schlägt ihm alternativ vor, dass sie ihm heute 1 Cent gibt und er das Geld einfach jeden Monat verdoppeln soll. In zwei Jahren solle er ihr dann den Endbetrag auszahlen. Der Vater will schon zustimmen, da er aber weiß, dass seine Tochter gut in Mathe ist, rechnet er doch lieber noch mal nach.

- Fülle die folgenden Tabellen mit dem Wert des angesparten Betrags in den ersten Monaten aus.
- Schreibe unter beide Wertetabellen, wie sich der Betrag von Schritt zu Schritt verändert hat.

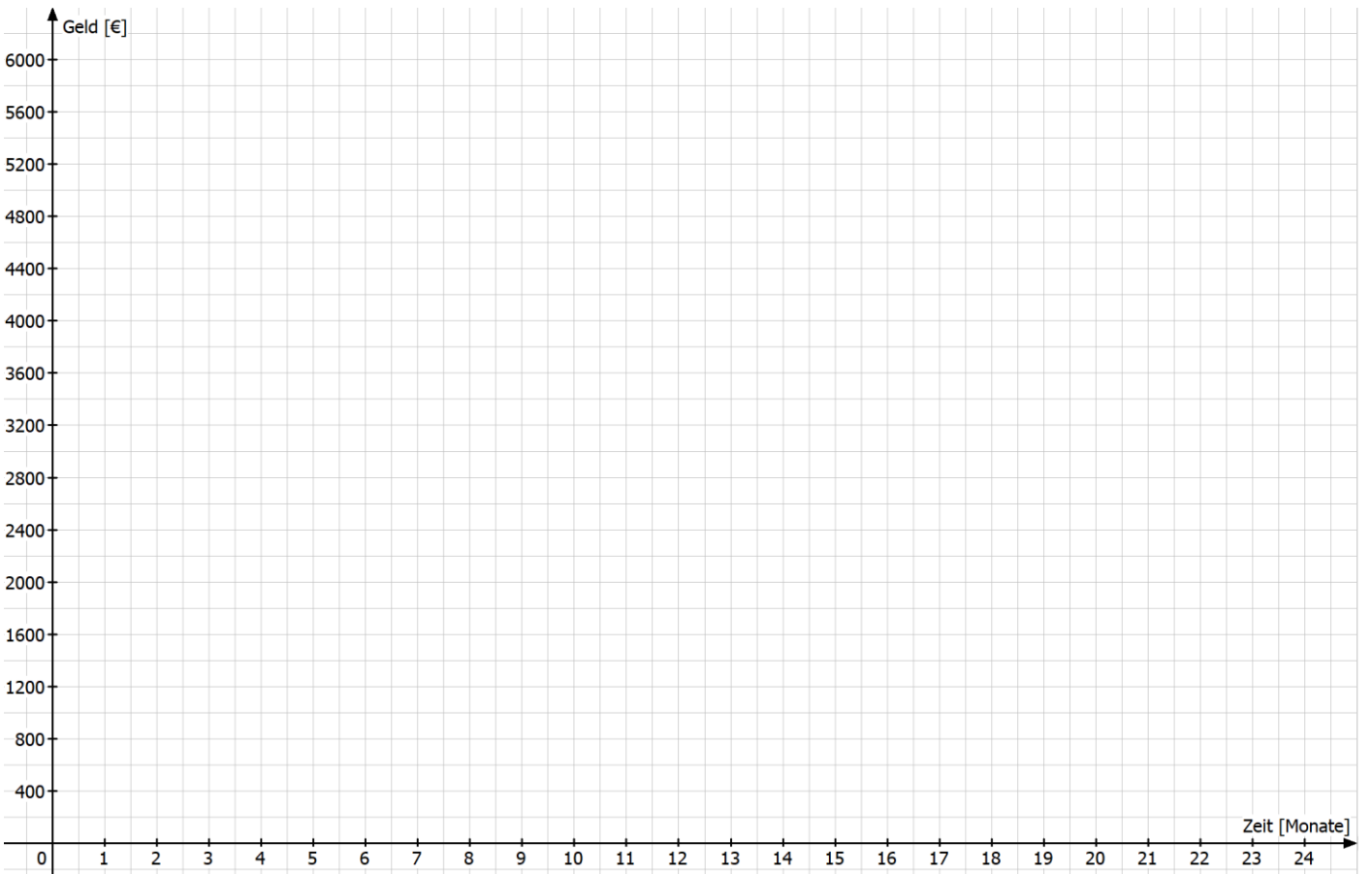
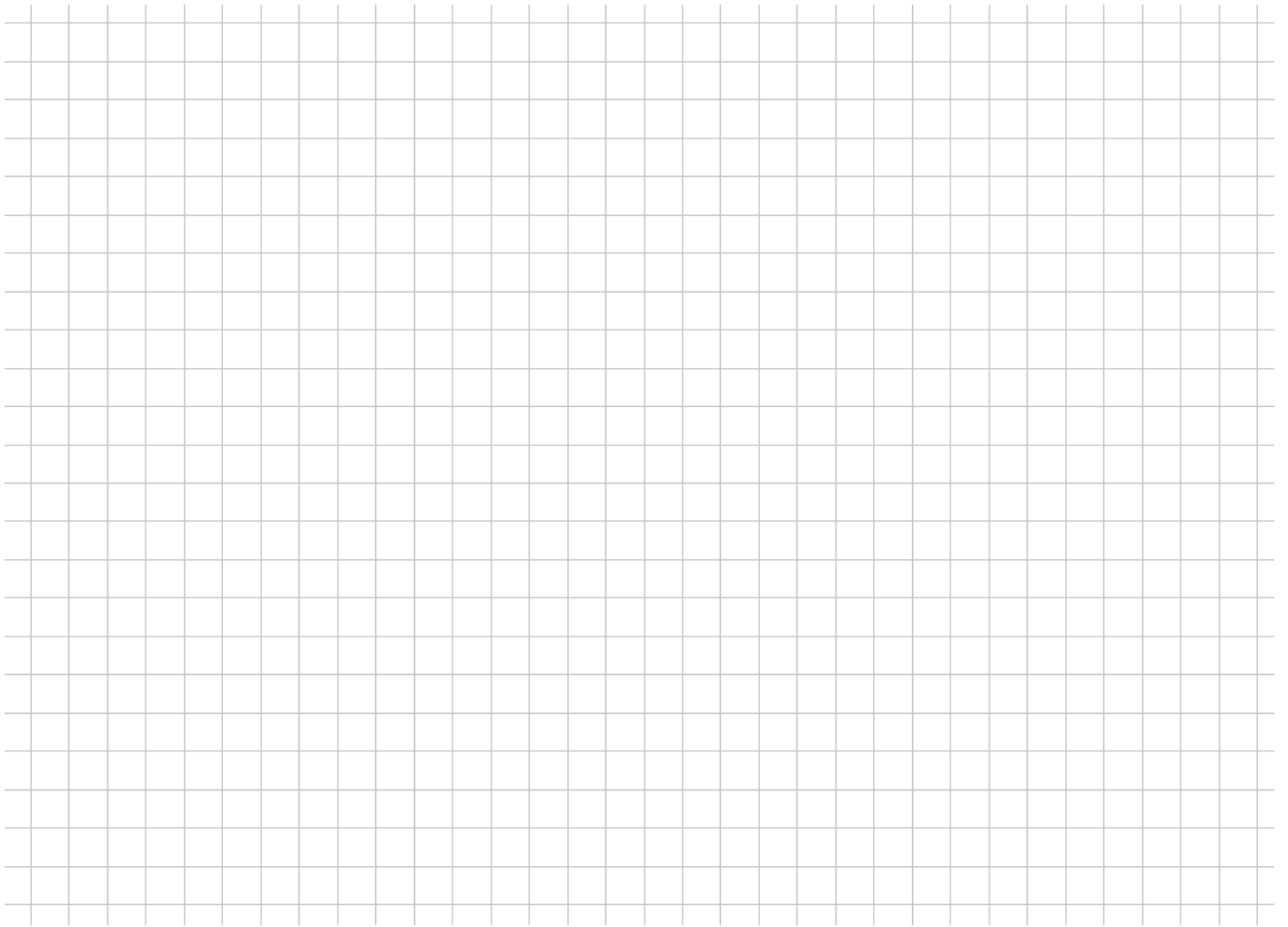
Vorschlag Vater

Monat	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Betrag	0	200							

Vorschlag Maren

Monat	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Betrag	0,01								

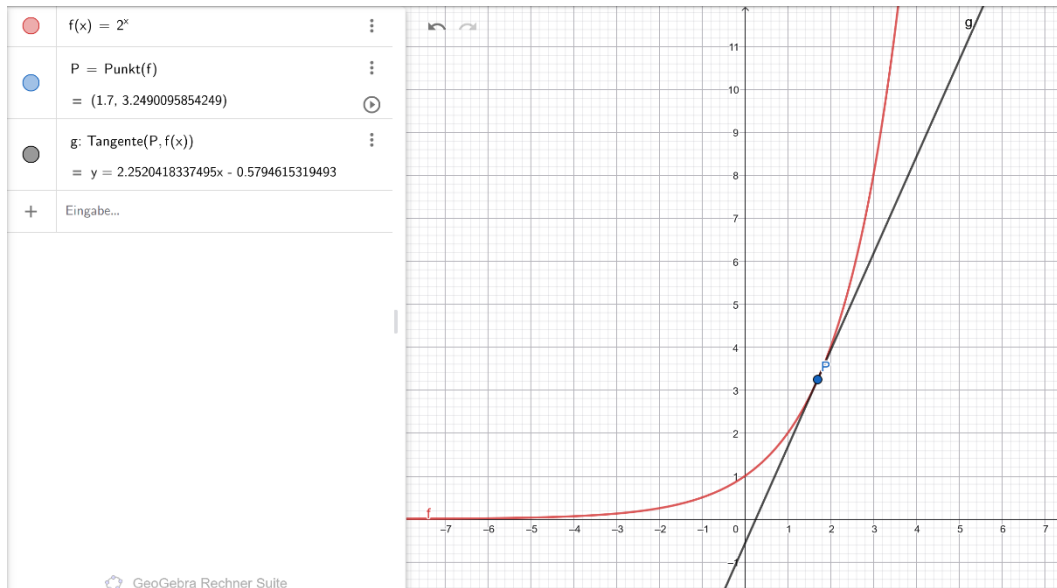
- Stelle jeweils eine Funktionsgleichung auf, die den angesparten Betrag y in Abhängigkeit der Anzahl der Monate x angibt.
- Berechne für beide Optionen, welchen Betrag der Vater an Maren in zwei Jahren auszahlen müsste.
- Stelle den Verlauf des angesparten Betrags für beide Optionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem über die Anzahl der Monate dar.
- Bestimme durch Ausprobieren wie viele Monate für jeden Option theoretisch vergehen, bis der Vater 1 Million Euro zurückgelegt hätte.
- Nimm an, dass der Vater das Geld kontinuierlich zurücklegt, so dass es am Ende des Monats immer passt. Wie groß wären die Betrag bei Maren's Vorschlag nach 5,5 Monaten, nach 7 Monaten und 3 Tagen und nach 700 Tagen (Nehme vereinfacht jeden Monat mit 30 Tage an).



Untersuche mit Geogebra die Steigung verschiedener Exponentialfunktionen.

Einstellungen in Geogebra:

- 1) Definiere zuerst eine Exponentialfunktion $f(x) = q^x$. Starte mit $q = 2$.
- 2) Definiere einen Punkt auf dem Funktionsgraphen mit $P = \text{Punkt}(f)$. Teste ob du diesen Punkt verschieben kannst. In der linken Spalte solltest du den x-Wert und den y-Wert des Punktes ablesen können.
- 3) Definiere eine Tangente am Punkt A indem du „Tangente(P, f(x))“ eingibst. Dann sollte links die Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ angezeigt werden



Bestimme den Zusammenhang zwischen dem Funktionswert der Exponentialfunktion und der Steigung der Exponentialfunktion (also die Steigung der Tangente an diesem Punkt) für die Basen $q = 2, q = 2,5$ und $q = 3$. Fertige dazu **für jedes q** eine Wertetabelle mit **mindestens 4 Punkten** an.

Bestimme möglichst genau eine Basis q , bei welcher der Funktionswert der Exponentialfunktion der Steigung der Tangente an der gleichen Stelle entspricht.



1. Wir identifizieren eine Exponentialfunktion anhand des Funktionsterms und des Funktionsgraphen.

Die Exponentialfunktion

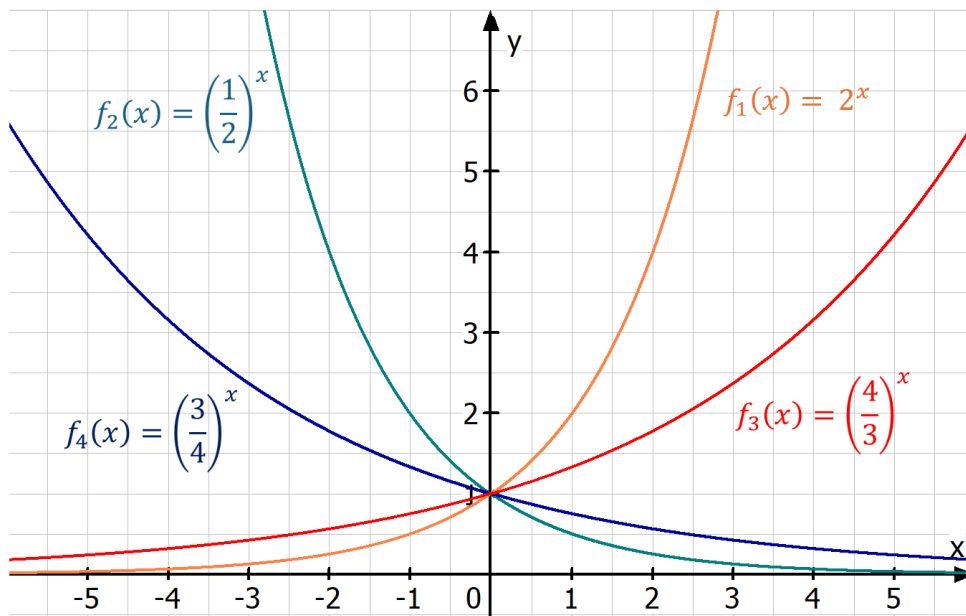
Eine Funktion f mit $f(x) = q^x$ ($q > 0$, $q \neq 1$) heißt Exponentialfunktion.

Ihre Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$. Die Zahl q wird der feste Wachstumsfaktor der Funktion genannt.

Der Wachstumsfaktor q

Bei prozentualen Änderungen $p\%$ kann der zugehörige Wachstumsfaktor mit $q = 1 + \frac{p\%}{100}$ berechnet werden. Beispiel $p\% = 10\%$ Wachstum $\rightarrow q = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$

Graphen von Exponentialfunktionen mit verschiedene Wachstumsfaktoren q :



- Alle Graphen verlaufen oberhalb der x-Achse und gehen durch die Punkte $A(0 | 1)$, $B_q(1 | q)$ und $C_q(-1 | q^{-1})$.
- Der Graph steigt für $q > 1$ und fällt für $0 < q < 1$.

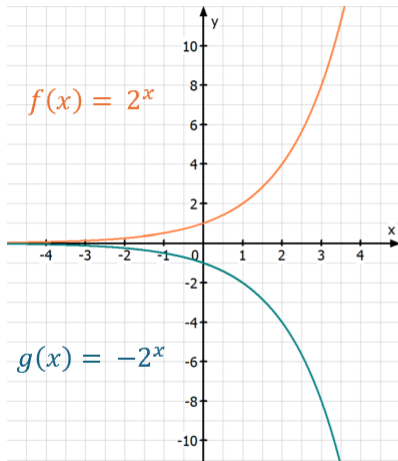
Der Anfangswert

Bei einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot q^x$ nennt man a den Anfangswert der Funktion, also den Wert an der Stelle $x = 0$ da gilt: $f(0) = a$.

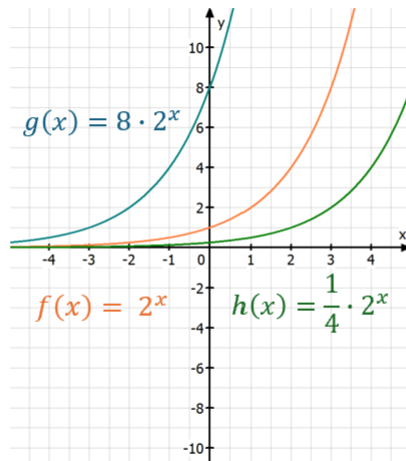
2. Wir beschreiben anhand von Funktionstermen oder Funktionsgraphen, wie der Graph einer Exponentialfunktion mittels Transformationen – unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus einem anderen Funktionsgraphen entsteht.

Transformationen

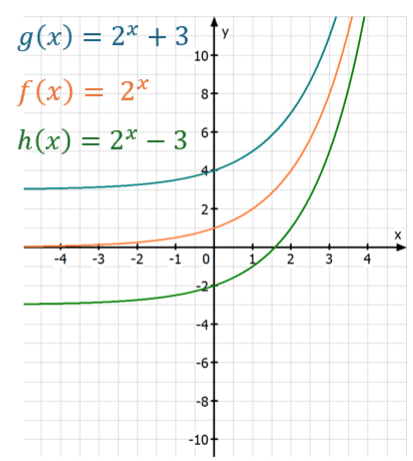
Spiegelung an der y-Achse



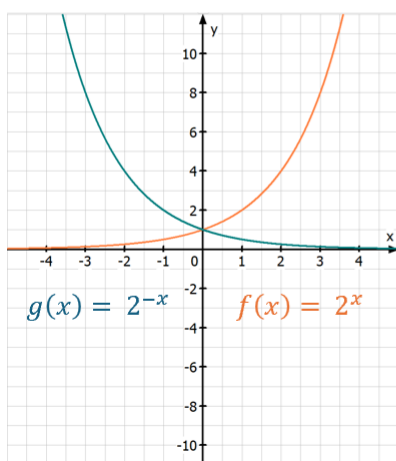
Stauchung/Streckung in y-Richtung



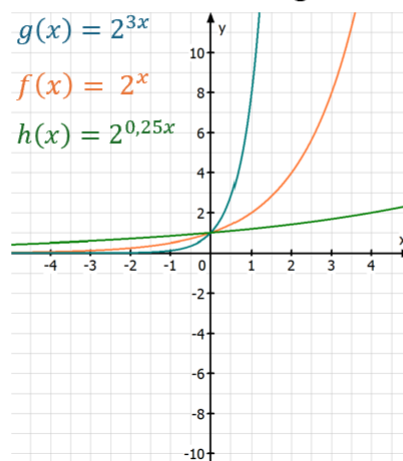
Verschiebung in y-Richtung



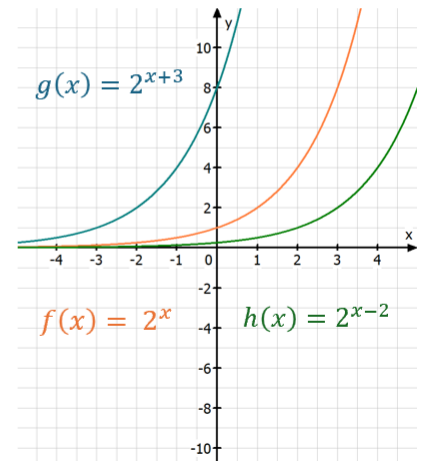
Spiegelung an der x-Achse



Stauchung/Streckung in x-Richtung

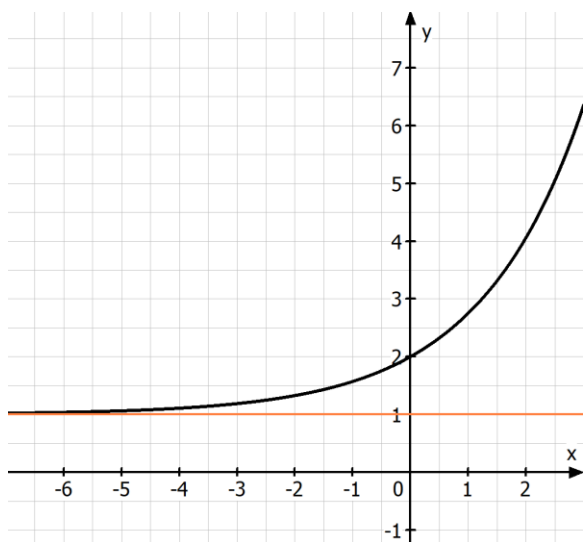


Verschiebung in x-Richtung



Wiederholung Asymptote

Eine Asymptote ist in der Mathematik eine Kurve oder Gerade, der sich der Graph einer Funktion $f(x)$ für betragsmäßig sehr große positive oder negative x -Werte also für $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ immer weiter annähert. Der Abstand zwischen der Funktion und der Asymptote wird dabei beliebig klein.



$$g(x) = 1,75^x + 1$$

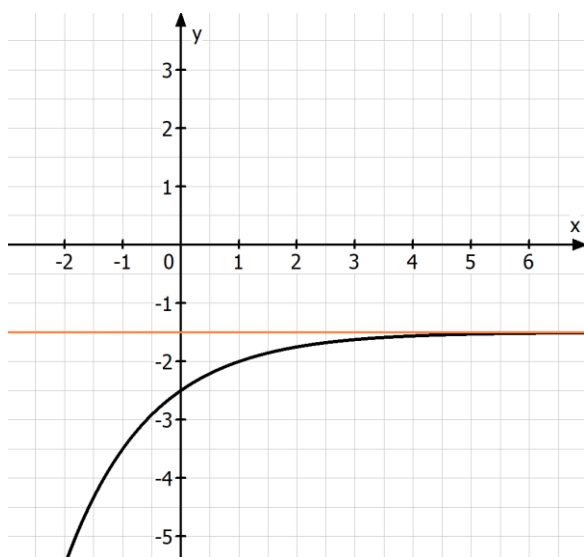
$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

→ keine Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

→ Asymptote mit Gleichung

$$y = 1$$



$$h(x) = -2^{-x} - 1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -1,5$$

→ Asymptote mit Gleichung

$$y = -1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

→ keine Asymptote

3. Die Schülerinnen und Schüler geben einen Näherungswert der Eulerschen Zahl e an und nennen die besondere Bedeutung der Basis e bei Exponentialfunktionen.

Die Euler'sche Zahl

Die Euler'sche Zahl $e = 2,718\dots$ ist eine irrationale Zahl mit einer besondere Bedeutung als Basis von Exponentialfunktionen. Bei der sogenannten **natürlichen Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ oder auch **e-Funktion** ist für alle x der Funktionswert gleich dem Wert der Steigung.

4. Die Schülerinnen und Schüler deuten den Logarithmus einer Zahl als Lösung einer Exponentialgleichung. Exponentialgleichungen lösen sie algebraisch und begründen die Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie.

Die Exponentialgleichung

Eine Gleichung der Form $2^x = 16$ heißt Exponentialgleichung. Durch probieren kann man hier noch gut auf die Lösung $x = 4$ kommen, womit dann korrekt gilt $2^4 = 16$. Für die Gleichung $2^x = 5$ kommt man mit probieren nicht weiter, es muss also eine andere Strategie gefunden werden.

Wiederholung Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Die Potenzgleichung $x^n = b$ mit $x \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ lässt sich durch Anwendung der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{}$ als Umkehrfunktion der n -ten Potenz lösen, denn $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Achtung: für **gerade** n gibt es zwei Lösungen mit $\pm \sqrt[n]{b}$.

Die Wurzelfunktion beantwortet die Frage: Welche Zahl x muss ich mit dem Exponenten n potenzieren, um die Zahl b zu erhalten?

Beispiele

$$x^3 = 21 \quad | \quad \sqrt[3]{}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{21}$$

$$x = \sqrt[3]{21}$$

$$x \approx 2,76$$

$$\text{Probe: } 2,76^3 = 21,02$$

$$x^6 = 103 \quad | \quad \sqrt[6]{}$$

$$\sqrt[6]{x^6} = \pm \sqrt[6]{103}$$

$$x = \pm \sqrt[6]{103}$$

$$x \approx \pm 2,165$$

$$\text{Probe: } 2,165^6 = 102,98$$

$$(-2,165)^6 = 102,98$$

Erinnerung: Die n -Wurzel kann auch als Potenzierung mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$ interpretiert werden, also $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Auch dann gilt $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$.

Der Logarithmus

Eine Exponentialgleichung $a^x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ lässt sich durch Anwendung von \log_a des Logarithmus zur Basis a lösen. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, gilt $\log_a(a^x) = x$.

$$\begin{array}{c}
 \text{Exponent} \\
 \downarrow \\
 \text{Basis} \rightarrow a^x = b \leftarrow \text{Numerus/} \\
 \text{Lösung}
 \end{array}$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a(a^x) = \log_a(b)$$

$$x = \log_a(b)$$

Logarithmus zur Basis a

$$\log_a(a^x) = x$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

Der Logarithmus beantwortet die Frage: Mit welcher Hochzahl x (welchem Exponent) muss man die Basis a potenzieren, um die Zahl b zu erhalten?

Beispiele:

$$2^3 = 8 \quad | \log_2$$

$$\log_2(2^3) = \log_2(8)$$

$$3 = \log_2(8)$$

$$10^4 = 10000 \quad | \log_{10}$$

$$\log_{10}(10^4) = \log_{10}(10000)$$

$$4 = \log_{10}(10000)$$

$$2^x = 5 \quad | \log_2$$

$$\log_2(2^x) = \log_2(5)$$

$$x = \log_2(5)$$

$$x \approx 2,32$$

$$3^x = 25 \quad | \log_3$$

$$\log_3(3^x) = \log_3(25)$$

$$x = \log_3(25)$$

$$x \approx 2,93$$

$$\text{Probe: } 2^{2,32} = 4,99$$

$$\text{Probe: } 3^{2,93} = 25,001$$

Der 10er Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis 10 gibt an, mit welchem Exponenten eine Exponentialgleichung mit der Basis 10 mit dem Numerus $b \in \mathbb{R}^+$ gelöst wird. Er wird auch 10er Logarithmus genannt.

$$10^x = b$$
$$\lg(b) = x$$

$$\log_{10}() = \lg() = \log()$$

Der natürliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e (Euler'sche Zahl) gibt an, mit welchem Exponenten eine Exponentialgleichung mit der Basis e mit dem Numerus $b \in \mathbb{R}^+$ gelöst wird. Er wird auch natürlicher Logarithmus genannt.

$$e^x = b$$
$$\ln(b) = x$$

$$\log_e() = \ln()$$

5. Die Schüler und Schülerinnen lösen Exponentialgleichungen algebraisch und begründen die Auswahl der jeweiligen Lösungsstrategie. Die berechneten Lösungen interpretieren die Schülerinnen und Schüler grafisch als Nullstellen einer Funktion beziehungsweise als Schnittstellen zweier Funktionen.

Weitere Lösungsstrategien zum Lösen von Exponentialgleichungen

Satz vom Nullprodukt (SNP)

$$x \cdot 2^x - 8x = 0$$

$$5^{2x} - 0,2 \cdot 5^x = 0$$

Substitution

$$3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 8 = 0$$

Substitution: $\quad = u \quad \quad \quad = 0$

Mitternachtsformel: $u_{1/2} = \text{_____}$

$$u_{1/2} = \text{_____}$$

$$u_1 = \quad \quad \quad u_2 =$$

Resubstitution:

Die Logarithmengesetze

Produktregel: $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

Quotientenregel: $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

Exponentenregel: $\log_a(u^z) = z \cdot \log_a(u)$

mit $a, u, v \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}$

Logarithmische Skalierung

Bei Abbildungen die sich über mehrere Größenordnungen erstrecken ist die Darstellung schwierig. Das genaue Ablesen des Wertes der Microsoft Aktie im Januar 1987 ist in der unteren Abbildung mit linearer Skalierung der Achsen nicht möglich.



Eine nicht-lineare Skalierung der y-Achse kann helfen dieses Problem zu lösen.

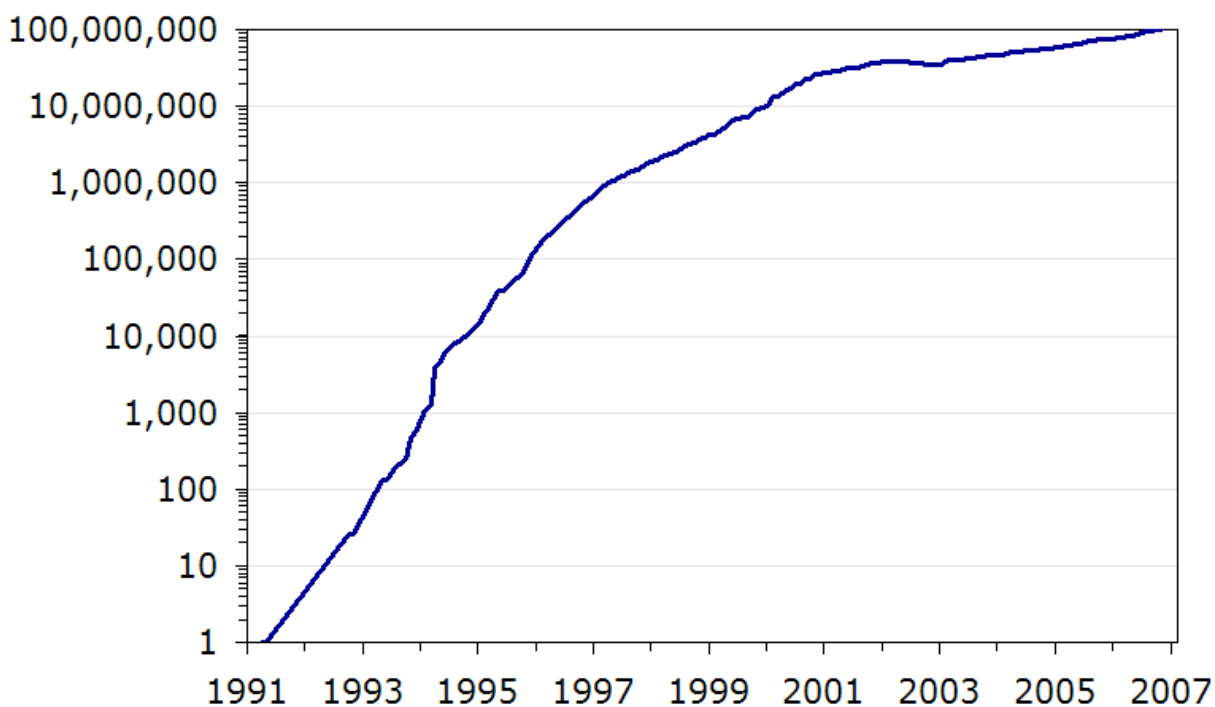
In der unteren Abbildung ist die y-Achse logarithmisch skaliert. Man erkennt, dass die Abstände der Striche an der y-Achse nicht mehr den gleichen Abstand haben. Der Abstand des y-Werts von der x-Achse ist dabei proportional zum Logarithmus des Werts.

Wichtig: Die Werte selbst werden nicht verändert, sondern nur wie sie in dem Diagramm aufgetragen werden.



<https://de.finance.yahoo.com/quote/MSFT/>

Ein weiteres Beispiel ist die Anzahl der besuchbaren Webseiten im Internet, welche sich von 1991 bis 2007 über 8 Größenordnungen erstreckt.



<https://www.nngroup.com/articles/100-million-websites/>

6. Die Schülerinnen und Schüler wechseln die Darstellung zwischen einer beliebigen Basis und der Basis e.

Basiswechsel

Eine positive reelle Zahl r kann als Potenz einer **beliebigen** positiven reellen Zahl a dargestellt werden ($a, r \in \mathbb{R}^+$). Es muss lediglich der richtige Exponent x gefunden werden ($x \in \mathbb{R}$).

$$a^x = r$$

Es ist also möglich einen Basiswechsel von einer Basis a in eine Basis b durchzuführen, um die Darstellung zu ändern ($a, b, r \in \mathbb{R}^+$; $x, z \in \mathbb{R}$):

$$a^x = b^z = r$$

Beispiele:

$$10^{0,903} \cong e^{2,079} \cong 2^3 = 8$$

oder

$$10 \cong e \cong 2 \cong 42$$

$2^x = 5^z$	$ \log_5$	$2^x = e^z$	$ $
$\log_5(2^x) = \log_5(5^z)$		$=$	
$x \cdot \log_5(2) = z \cdot \log_5(5)$		$=$	
$x \cdot \log_5(2) = z \cdot 1$		$=$	
$z = x \cdot \log_5(2)$		$z =$	
$\Rightarrow 2^x = 5^{\log_5(2) \cdot x}$		$\Rightarrow 2^x = e$	

$$a^x = r \quad \Rightarrow \quad b^{\log_b(a) \cdot x} = r$$

7. Die Schülerinnen und Schüler interpretieren den Logarithmus als Funktion und lernen seine Eigenschaften kennen

Wiederholung Umkehrfunktion

Man bildet die Umkehrfunktion einer Funktion, indem man in der Funktionsgleichung x und y vertauscht und die Gleichung dann nach y auflöst. Diese neue Gleichung ist die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion.

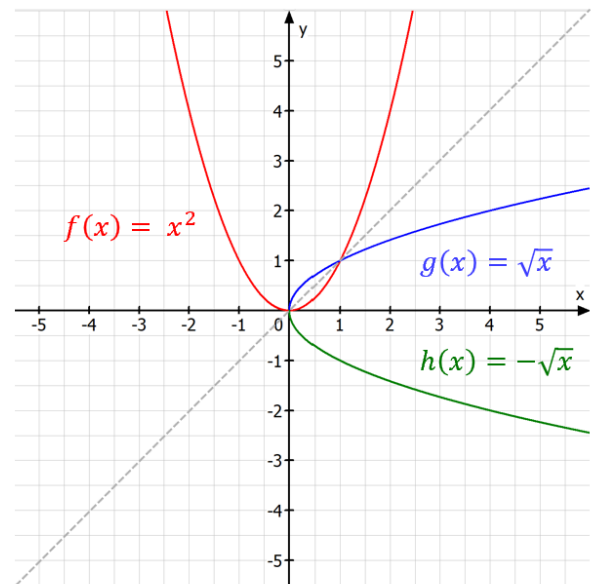
Beispiel: Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Quadratfunktion $f(x) = x^2$

Ursprüngliche Funktionsgleichung: $y = x^2$

Umtausch von x und y : $x = y^2$

Auflösen nach y : $y = \pm\sqrt{x}$

Die Umkehrfunktion(en) der Quadratfunktion lauten also $g(x) = \sqrt{x}$ und $h(x) = -\sqrt{x}$



Die Logarithmusfunktion

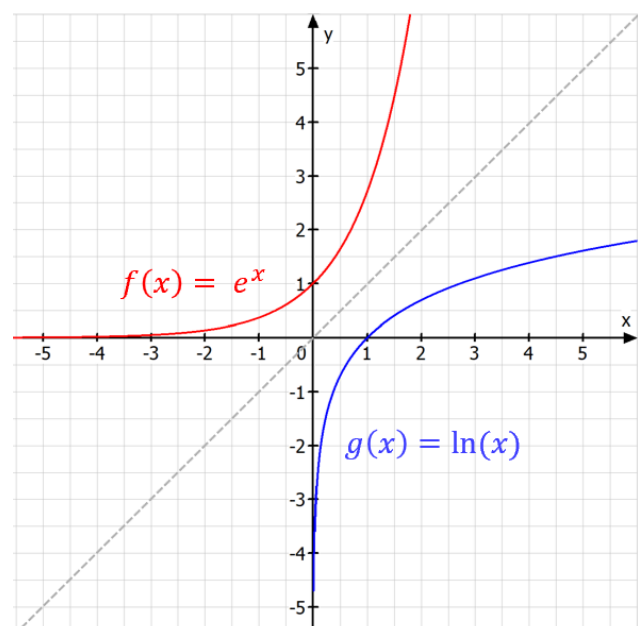
Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion am Beispiel $f(x) = e^x$

Ursprüngliche Funktionsgleichung: $y = e^x$

Umtausch von x und y : $x = e^y$

Auflösen nach y : $y = \ln(x)$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis e lautet also $g(x) = \ln(x)$



1.1.1 Ordne die Funktionsgleichungen den abgebildeten Graphen zu

$$a(x) = 3^x$$

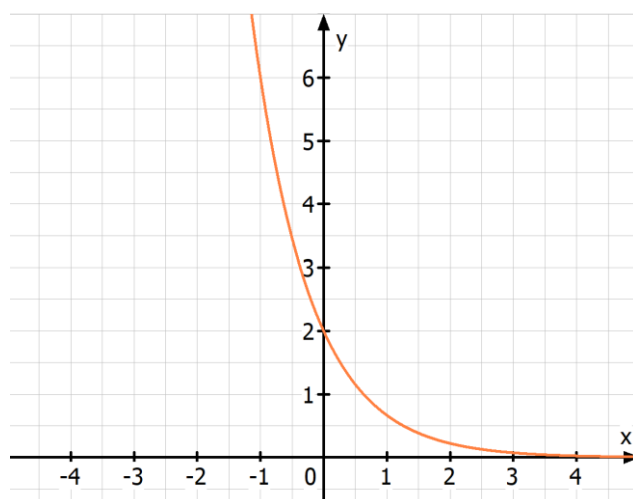
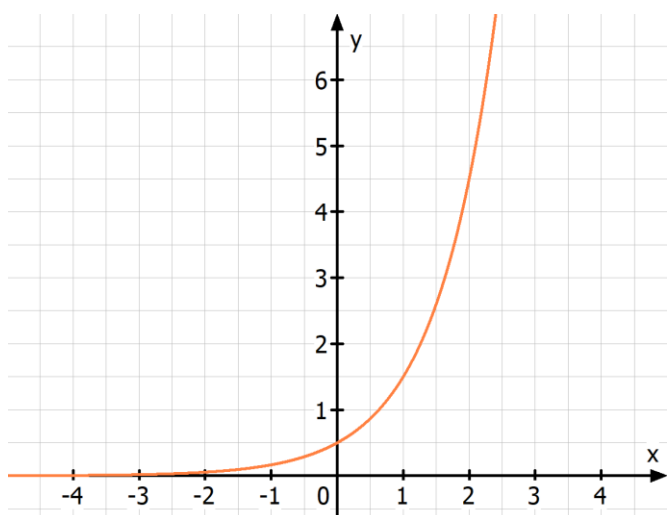
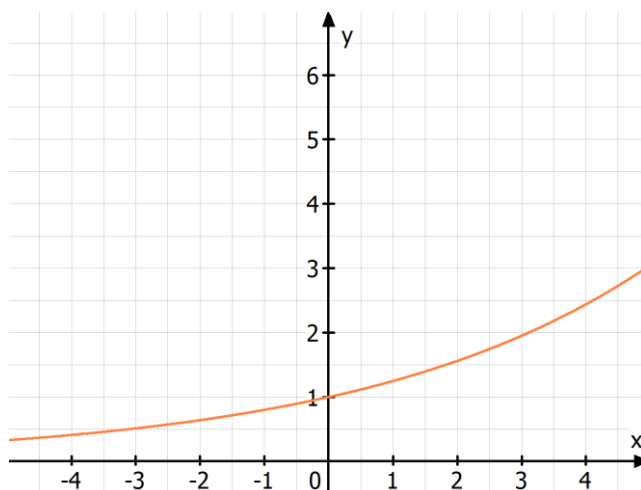
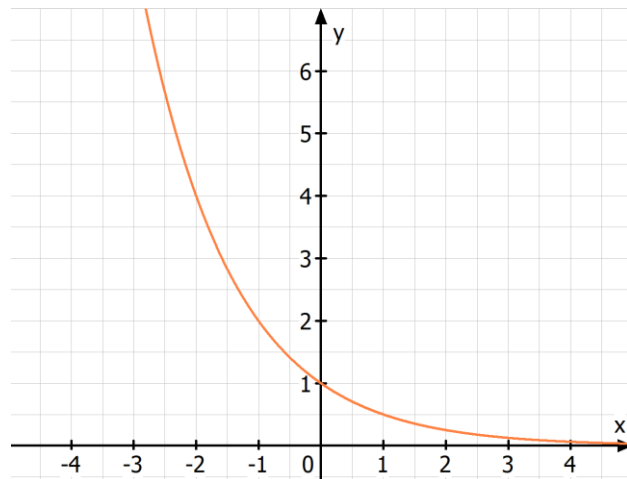
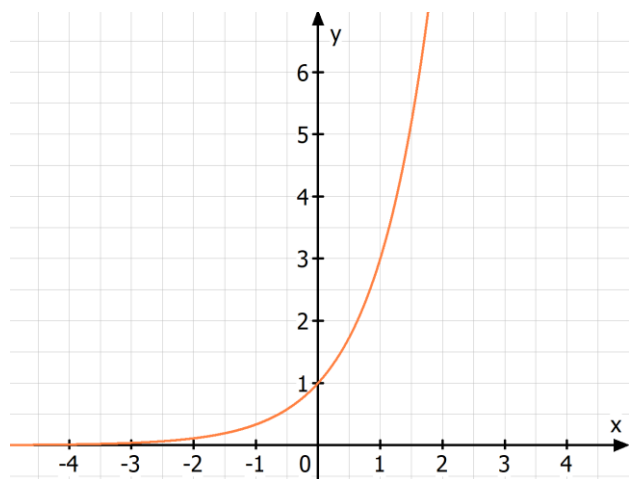
$$b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$c(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$d(x) = 1,25^x$$

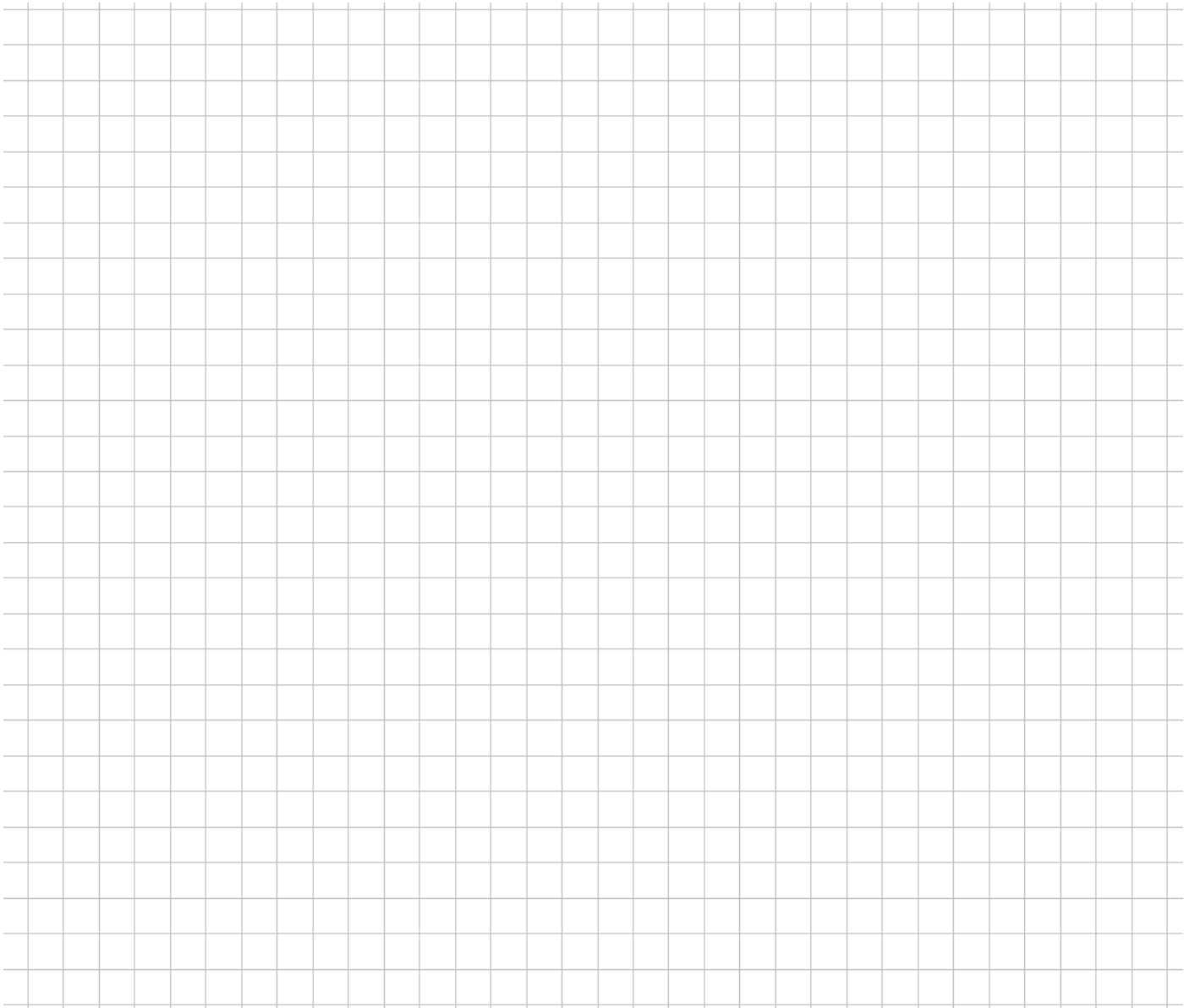
$$e(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$f(x) = 0,5 \cdot 3^x$$



1.1.2 Bestimme ob lineares oder exponentielles Wachstum vorliegt und gib die die Funktionsgleichung an:

- a) Eine Bakterienkultur enthält $3 \cdot 10^{12}$ Bakterien und ihre Anzahl verdreifacht sich jede Woche.
- b) Die Quecksilbersäule eines Thermometers steht bei 0°C bei 2 mm, sie steigt bei jeder Temperaturerhöhung von 1°C um 0,5 mm.
- c) Der Tank einer Ölheizung enthält 2000 l Öl und pro Monat werden 400 l Öl verbraucht.
- d) Auf einem Festgeldkonto sind 2000€ zu 2,5% Zinsen pro Jahr angelegt.
- e) Bei einer Grippewelle verdoppelt sich die Zahl der Infizierten wöchentlich. Anfangs sind 42 Personen infiziert.
- f) Ein Kreditkartenkonto steht bei -800 €, es werden monatlich 3% Strafzinsen erhoben.
- g) Ein 30.000€ teurer Pkw verliert jährlich 15% seines Werts.
- h) Ein Stalagmit in einer Tropfsteinhöhle ist 60 cm hoch und wächst jährlich um 2 mm.



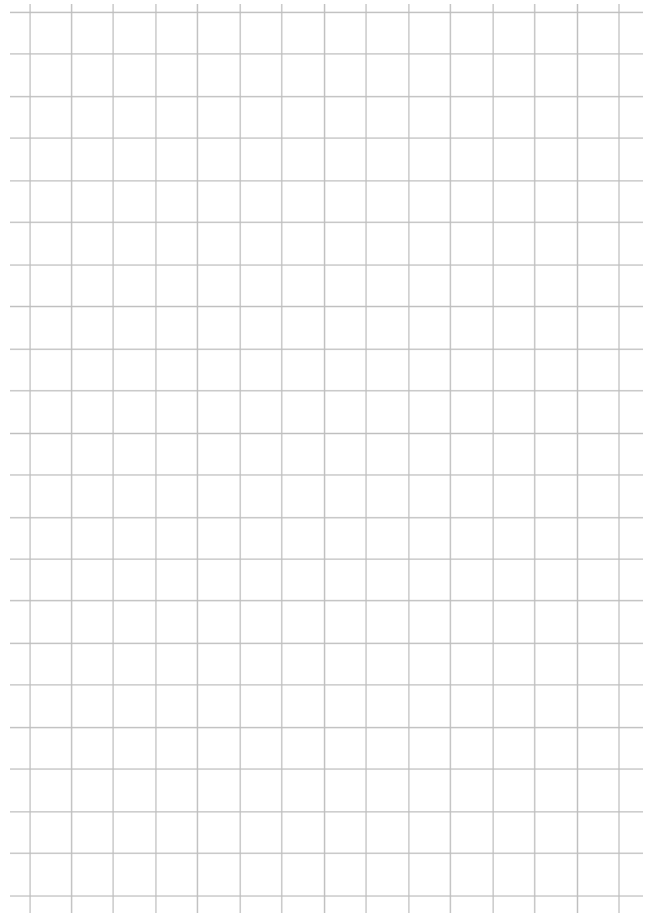
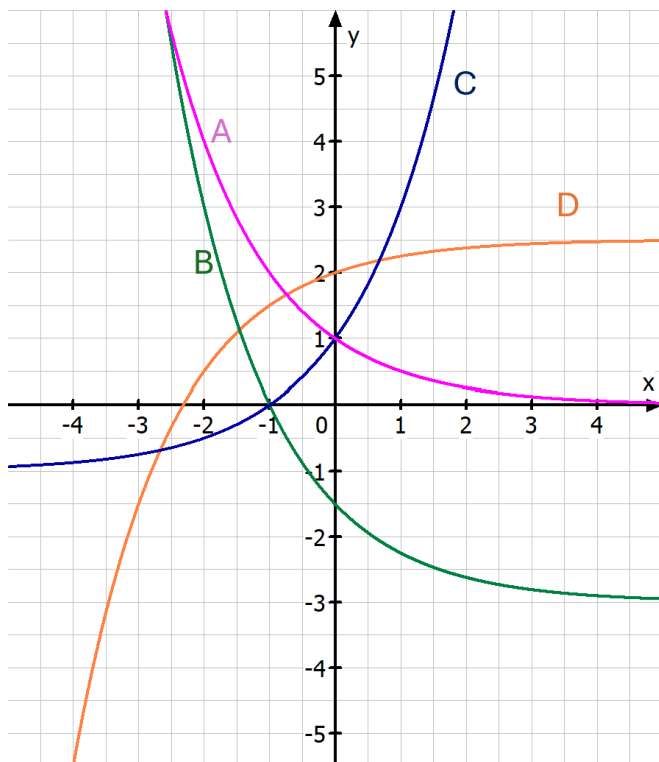
1.2.1 Ein Erbe erhält 7396,9 € vom Nachlass seiner Großmutter. Die Großmutter hatte das Geld für 12 Jahre zu 2,5 % p.a. (per annum also pro Jahr) angelegt.

a) Welchen Betrag hatte sie ursprünglich eingezahlt?

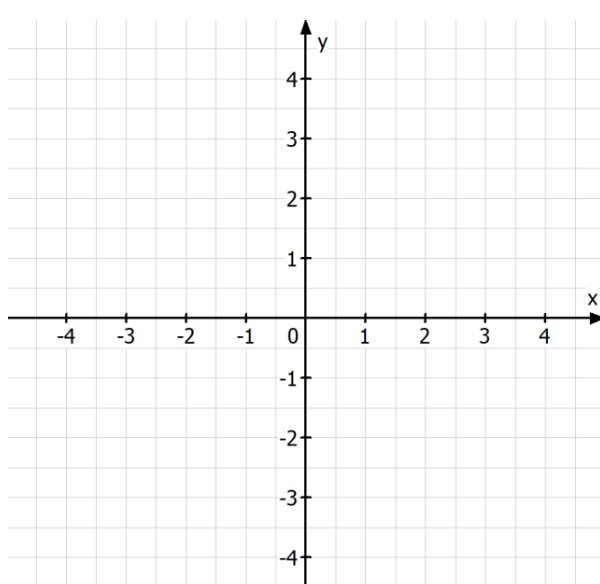
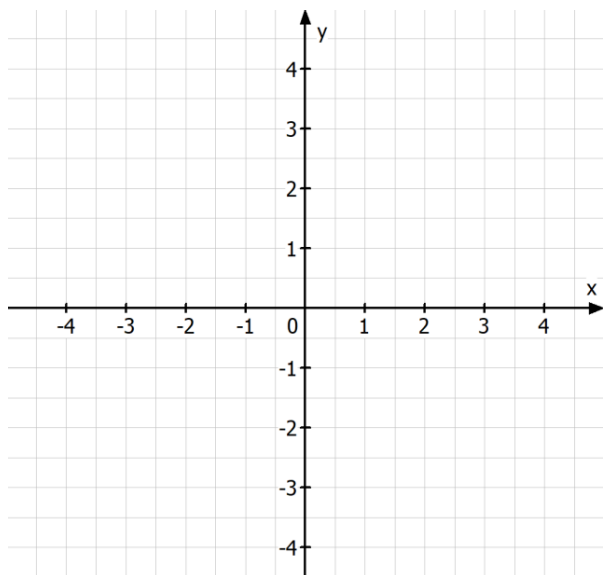
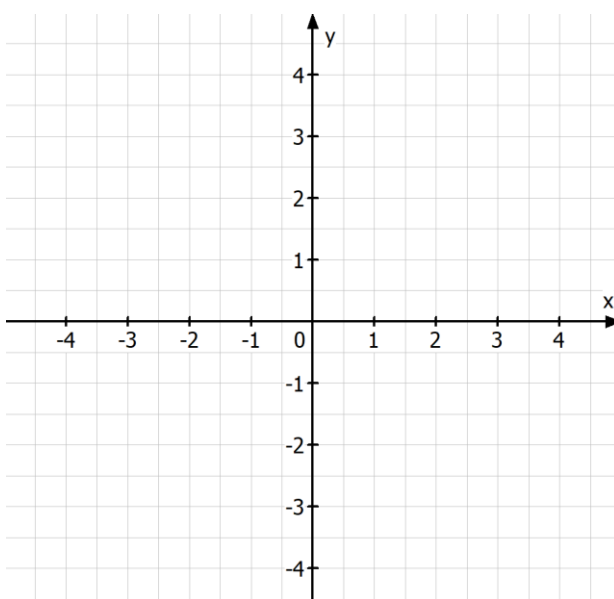
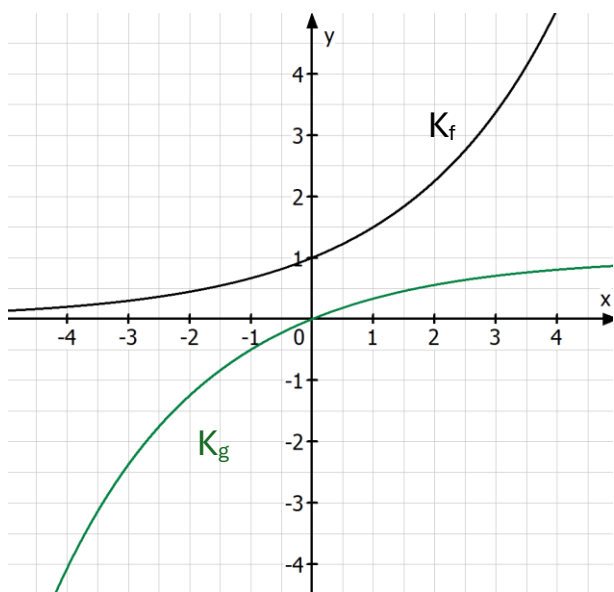
b) Berechne welcher Zinssatz nötig ist, damit aus dem geerbten Betrag nach 12 weiteren Jahren 15000€ werden?



2.1.1 Folgende Graphen gehören zu Exponentialfunktionen der Form $g(x) = a \cdot 2^{\pm x} + d$. Bestimme jeweils a und d sowie das Vorzeichen von x und gib die Asymptote an.



2.3.1 Die Funktion $f(x) = 1,5^x$ soll in die Funktion $g(x) = -1,5^{-x} + 1$ überführt werden. Gib die Transformationen an, die dafür nötig sind. Untersuche, ob die Reihenfolge der Transformationen eine Rolle spielt. Gib die korrekte Reihenfolge der Transformationen in einem Lösungssatz an.



4.1.1 Bestimme die logarithmische Form

a) $5^2 = 25$

b) $3^3 = 27$

c) $10^4 = 10000$

d) $256 = 2^8$

e) $9^3 = 729$

f) $2^{-4} = \frac{1}{16}$

g) $10^{-5} = 0,00001$

h) $\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

4.1.2 Bestimme die exponentielle Form

a) $\log_4(2) = \frac{1}{2}$

b) $\log_3(81) = 4$

c) $\lg(10000) = 4$

4.1.3 Bestimme den Logarithmus (ohne Taschenrechner). Formuliere zuerst die Fragestellung.

a) $\log_4(64)$

b) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

c) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

d) $\log_4(\sqrt[4]{4})$

e) $\lg(100000)$

f) $\log_5(\sqrt[4]{125})$

g) $\lg\left(\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$

4.1.4 Berechne mit dem Taschenrechner:

a) $\log_4(100)$

b) $\lg\left(\frac{1}{17}\right)$

c) $\ln(2 \cdot 10^8)$

d) $\log_5(\pi)$

e) $\log_\pi(5)$

4.1.4 Berechne die Lösung für x

Musterbeispiel: $\log_a(a^7) = x \Leftrightarrow a^7 = a^x \rightarrow x = 7$

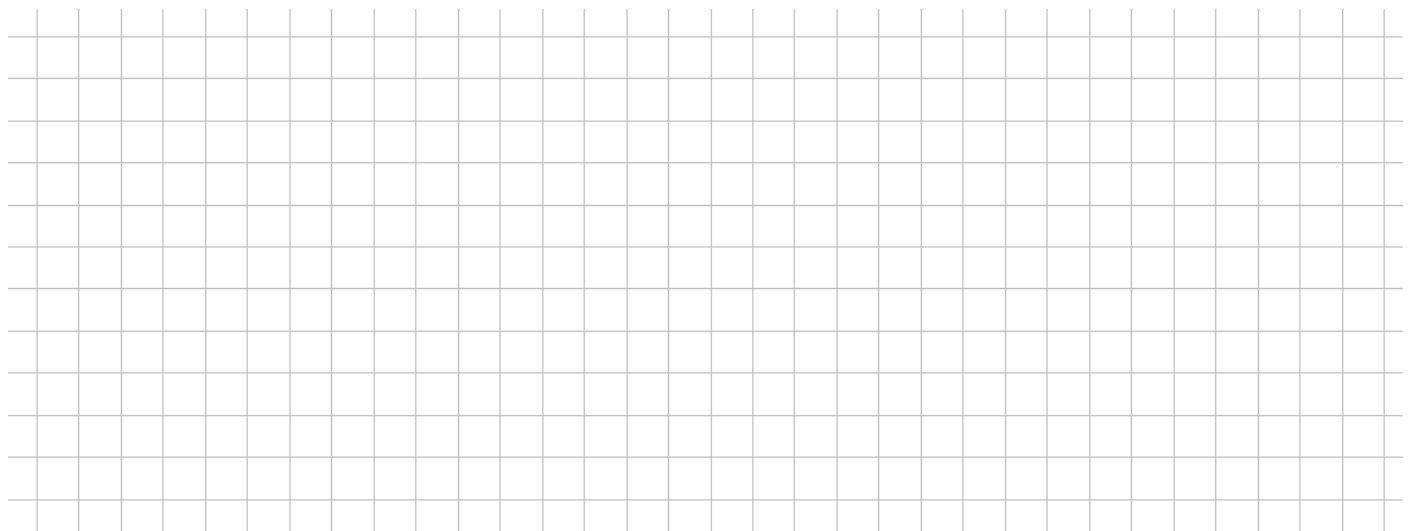
a) $\log_a(a^{-7}) = x$ b) $\log_b\left(\frac{1}{b^3}\right) = x$ c) $\log_c(\sqrt{c}) = x$ d) $\log_d\left(\frac{1}{\sqrt[5]{d^3}}\right) = x$



4.2.1 Berechne die Lösung für x

Musterbeispiel: $\log_4(8) = x \Leftrightarrow 8 = 4^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^{2x} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

a) $\log_9(27) = x$ b) $\log_{27}\left(\frac{1}{3}\right) = x$ c) $\log_{32}(8) = x$ d) $\log_{64}(16) = x$



4.3.1 Begründe folgende Aussagen für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $x \in \mathbb{R}$

a) $\log_a(0)$ kann nicht bestimmt werden

b) $\log_a(1) = 0$

c) $x = e^{\ln(x)}$



5.1.1 Berechne die Lösung der Exponentialgleichung

a) $3^{2x+1} = 3^{x+2}$

b) $6^{4x-5} = 216$

c) $7^{x-2} = \sqrt{7}$



5.1.2 Berechne die Lösung der Exponentialgleichung

a) $3^x \cdot (3^x - 2) = 0$

b) $(2^x - 1) \cdot (2^{-x} + 1) = 0$

c) $7^{2x} + 3 \cdot 7^x = -2$

d) $4^x - 12 \cdot 2^x = -32$

e) $2^{2x-1} + 3 \cdot 2^x = 8$



5.2.1 Zeige, dass hier die Produktregel des Logarithmus gilt:

a) $\log_2 (4 \cdot 8)$

b) $\lg (\sqrt{10} \cdot 100)$

c) $\lg (10^4 \cdot \sqrt{1000} \cdot \sqrt[3]{100})$



5.2.2 Zeige, dass hier die Quotientenregel des Logarithmus gilt:

a) $\log_2 \left(\frac{2^5}{2^3} \right)$

b) $\lg \left(\frac{\sqrt{10}}{1000} \right)$



5.2.3 Zeige, dass hier die Exponentenregel des Logarithmus gilt:

a) $\log_2 \left((2^3)^2 \right)$

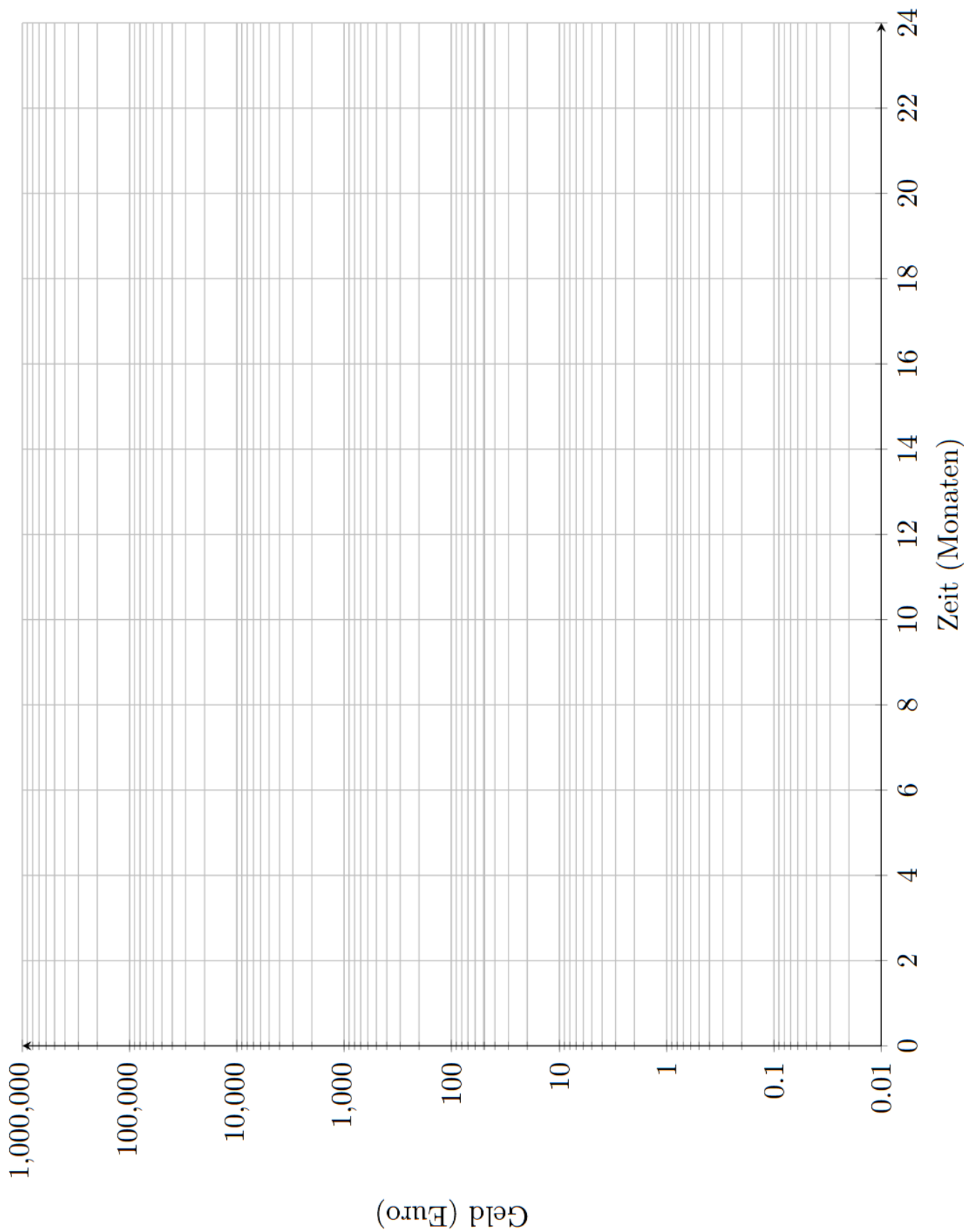
b) $\lg \left(\sqrt[3]{1000} \right)$



5.2.4 Berechne $\lg(2)$, $\lg(20)$ und $\lg(200)$ mit dem Taschenrechner. Was stellst du fest? Erkläre deine Beobachtung mithilfe der Logarithmengesetze.



5.2.5 Trage die Daten von Marens Vorschlag aus Komplikation 1, welcher durch die Funktionsgleichung $f(x) = 0,01 \cdot 2^x$ angegeben war in das folgende Diagramm ein. Was kannst du beobachten?



6.1.1 Bestimme den Exponenten für die neue Basis:

- a) 6^x in Basis e b) e^x in Basis 10 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ in Basis 2 d) 5^x in Basis $\frac{1}{3}$

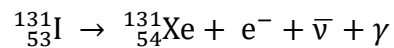


6.1.2. Bestimme die Lösung der Gleichungen mit Hilfe des logarithmus naturalis und der Logarithmengesetze.

- a) $3^x = 81$ b) $4^x = 0,5$ c) $0,3^x = 5$



Ein radioaktiver Atomkern, kann mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit in einen anderen Atomkern zerfallen und dabei radioaktive Strahlung in Form von z.B. sehr energiereichen Elektronen und Gammastrahlen abgeben. Ein Beispiel ist der Zerfall von Jod-131 in das stabile Atom Xenon-131:



Die Anzahl der verbleibenden I-131 Kerne nach der Zeit t kann mit folgender Funktion modelliert werden:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N_0 ist die Anzahl der I-131 Kerne zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Zerfallskonstante λ ist die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit für einen einzelnen Kern und beträgt bei I-131: $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}$

- Berechne für $N_0 = 1000$ wie viele I-131 Atome zum Zeitpunkt $t_1 = 1\text{min}$, $t_2 = 1\text{h}$, $t_3 = 1\text{d}$, $t_4 = 1\text{y}$ noch übrig sind.
Es gilt: $1\text{y} = 365\text{d} = 365 \cdot 24\text{h} = 365 \cdot 24 \cdot 60\text{min} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\text{s}$.
- Berechne nach welcher Zeit noch 50%, 1% und 0,01% der ursprünglichen Anzahl der I-131 Kerne vorhanden sind.
- Anstatt der Zerfallskonstante wird oft die Halbwertszeit $T_{1/2}$ angegeben, also die Zeit, nach der noch die Hälfte der Atomkerne vorhanden sind. Bestimme eine Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion mit der Basis 2 zur Beschreibung des Zerfalls welche diese Halbwertszeit enthält und begründe warum gilt $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.