Pizza ~~Mathe~~ liebsch

11.1.Mittelstufenvertiefung

Die erste Bildungsplaneinheit umfasst Themen, die die Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I bereits kennengelernt haben können, die jedoch im Verlauf der Eingangsklasse in unterschiedlichen Aspekten vertieft und erweitert werden. Dabei ist nicht nur an eine inhaltliche Vertiefung gedacht; vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler anhand bekannter Themen an das Arbeiten in der Sekundarstufe II herangeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Grundvorstellung mathematischer Begriffe, die es ihnen erlaubt, Inhalte zu verknüpfen und mathematische Aussagen selbstständig abzuleiten. Sie lernen an einzelnen Beispielen den Beweis als wesentliches Element der Mathematik kennen und erfahren so ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte.

Komplikation

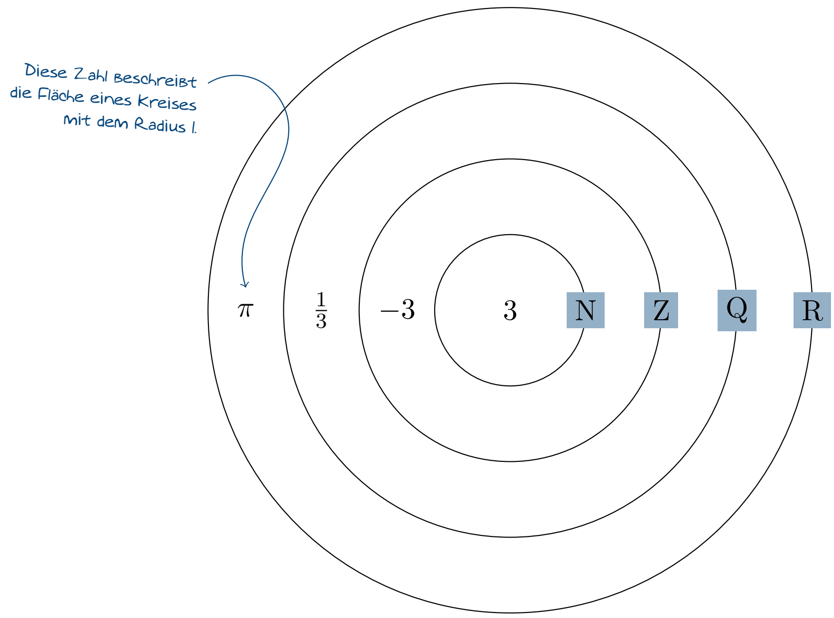
Der Pizzastücklefant isst Pizza.

1. Iss ein Pizzastückle.

2. Untersuche die Aussage 'Wer Pizza mit Ananasstückchen isst, gehört ins Gefängnis', auf ihren Wahrheitsgehalt.

3. Der Pizzaecklefant befüllt den Pizzarand seiner Pizzen mit einem Spezialkäse. Er hat noch Spezialkäse für $168\mathrm{cm}$ Pizzarand übrig, mit dem er eine rechteckige Pizza backen will. Er modelliert das Problem mit den Seitenlängen $a, b \in \mathrm{Z}$. Ermittle mögliche Seitenlängen a und b an, sodass die Pizza einen Flächeninhalt von $2000\mathrm{cm}^2$ hat.

1 Wir definieren die vier **Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$**:



Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{$Als Bruch darstellbare Zahlen$\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{$Alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl$\}$

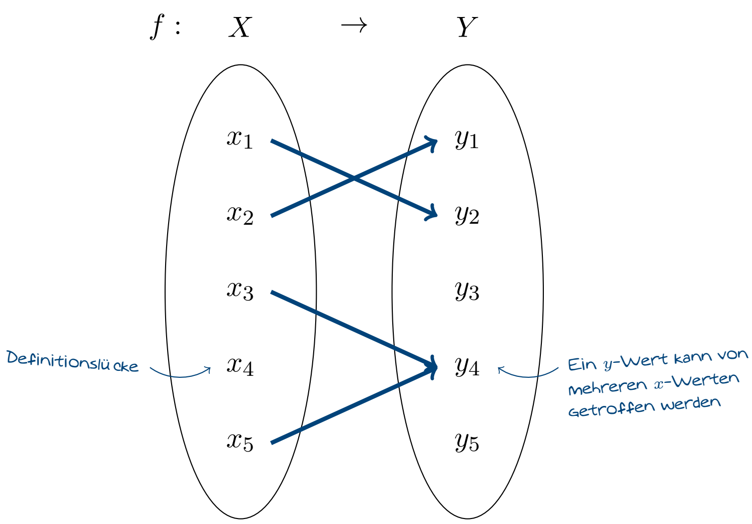
Möglliches GFS-Thema: Rechnen mit komplexen Zahlen

Die Zugehörigkeit einer Zahl zu einer Zahlenmenge stellen wir durch das Elementsymbol dar:

$\in$	'gehört zu'
$\notin$	'gehört nicht zu'

2 Eine Funktion f ist eine Abbildung von einer Menge X in eine Menge Y, die jedem $x \in X$ aus dem Definitionsbereich höchstens ein $y \in Y$ aus dem Wertebereich zuordnet. Wird ein einzelnes x keinem y zugeordnet, so bezeichnen wir es als Definitionslücke. Wir schreiben die Funktionsgleichung mit dem Funktionsterm y:

$$f(x) = y$$



Zur effizienten Notation von Teilmengen definieren wir für $a < b \in \mathrm{R}$ die folgenden Intervalle:

$$[a;b] = a \leq x \leq b \qquad [a;b[= a \leq x < b$$

$$]a;b] = a < x \leq b \qquad]a;b[= a < x < b$$

Außerdem definieren wir bestimmte Intervalle für $X \in \{\mathrm{N};\ \mathrm{Z};\ \mathrm{Q};\ \mathrm{R}\}$:

X^* : Alle Elemente von X außer 0

X_+ : Alle positiven Elemente von X

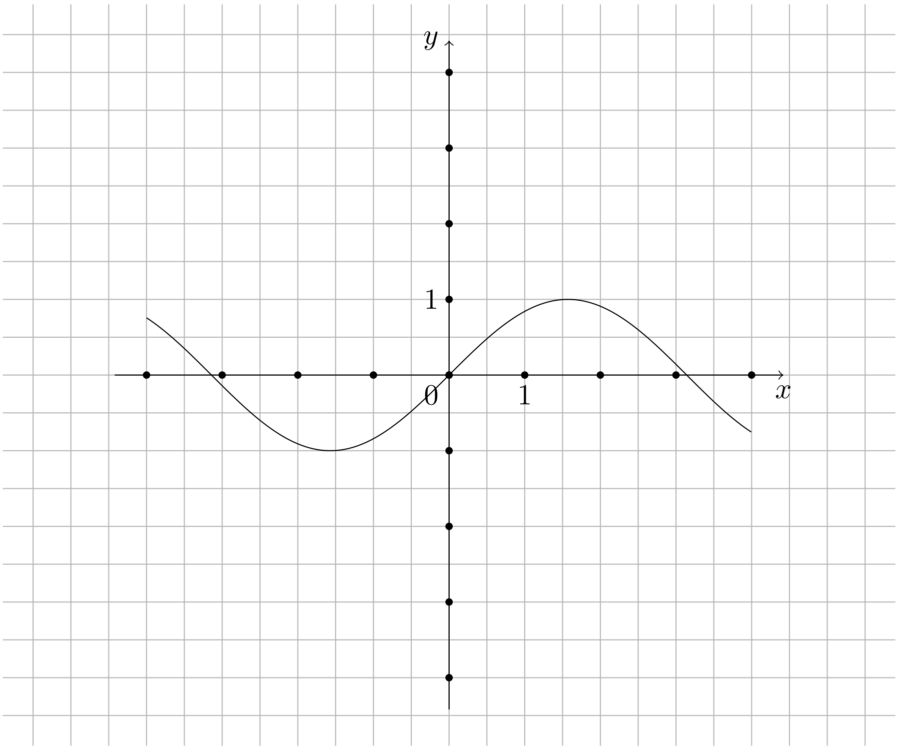
X_- : Alle negativen Elemente von X

X_+^0 : Alle nichtnegativen Elemente von X

X_-^0 : Alle nichtpositiven Elemente von X

3 Wir definieren drei verschiedene Darstellungsformen von Funktionen:

- Das Schaubild besteht aus einem vollständigen Koordinatensystem und einem ausschnittsweise gezeichneten Funktionsgraphen:



- Die Wertetabelle listet spaltenweise eine endliche Anzahl von Punkten des Funktionsgraphen auf:

x					$\dots$
y					$\dots$

- Die Funktionsgleichung beschreibt die Abhängigkeit aller x-Werte von Punkten des Funktionsgraphen zu ihren y-Werten:

$$f(x) = y$$

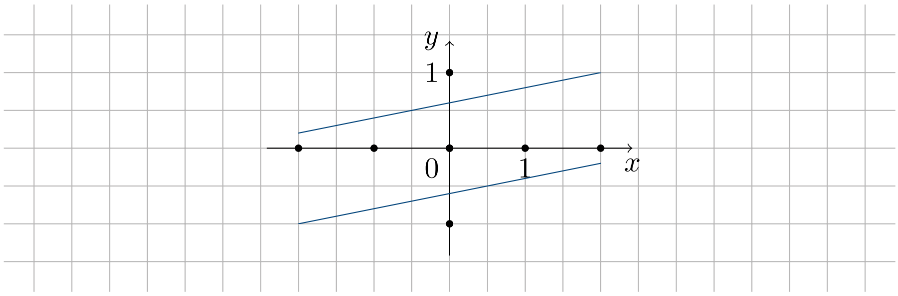
4 Für $a;\ b \in R$ definieren wir eine lineare Funktion mit dem Steigungswinkel α durch:

$$f(x) = a \cdot x + b; \qquad \tan(\alpha) = a$$

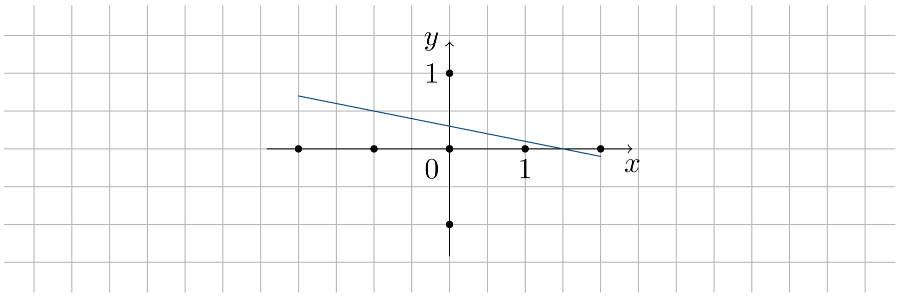
Mit Hilfe der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b können wir das Schaubild (eine Gerade) skizzieren. Besondere Geraden sind die erste Winkelhalbierende $y = x$ und die zweite Winkelhalbierende $y = -x$.

Wir unterscheiden drei Lagebeziehungen:

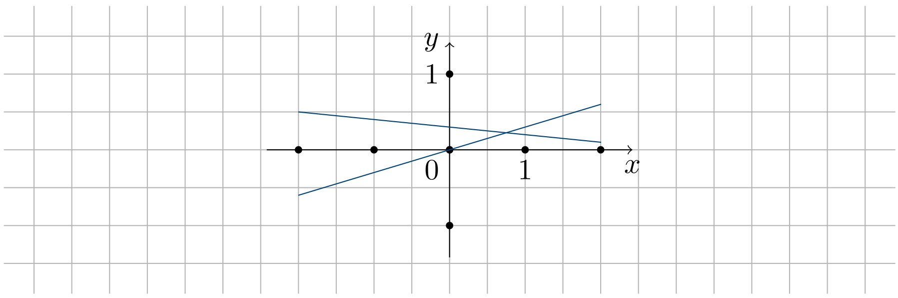
- Sind zwei Geraden parallel, dann haben sie die gleiche Steigung aber einen unterschiedlichen y-Achsenabschnitt:



- Sind zwei Geraden identisch, dann haben sie die Gleiche Steigung und denselben y-Achsenabschnitt:



- Schneiden sich zwei Geraden, dann haben sie eine unterschiedliche Steigung:



5 Wir definieren Potenzgesetze:

- $$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$
- $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
- $$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$
- $$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$
- $$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$
- $$x^0 = 1$$
- $$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$
- $$x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

Retardation

1 Benenne die vier Zahlenmengen und notiere sie im Kreisdiagramm:

$$\mathrm{Q};\ \ \mathrm{Z};\ \ \mathrm{N};\ \ \mathrm{R}$$

Notiere die Zahlen möglichst weit Innen im Kreisdiagramm:

$$-4;\ \ 42;\ \ \frac{3}{2};\ \ \sqrt{10}$$

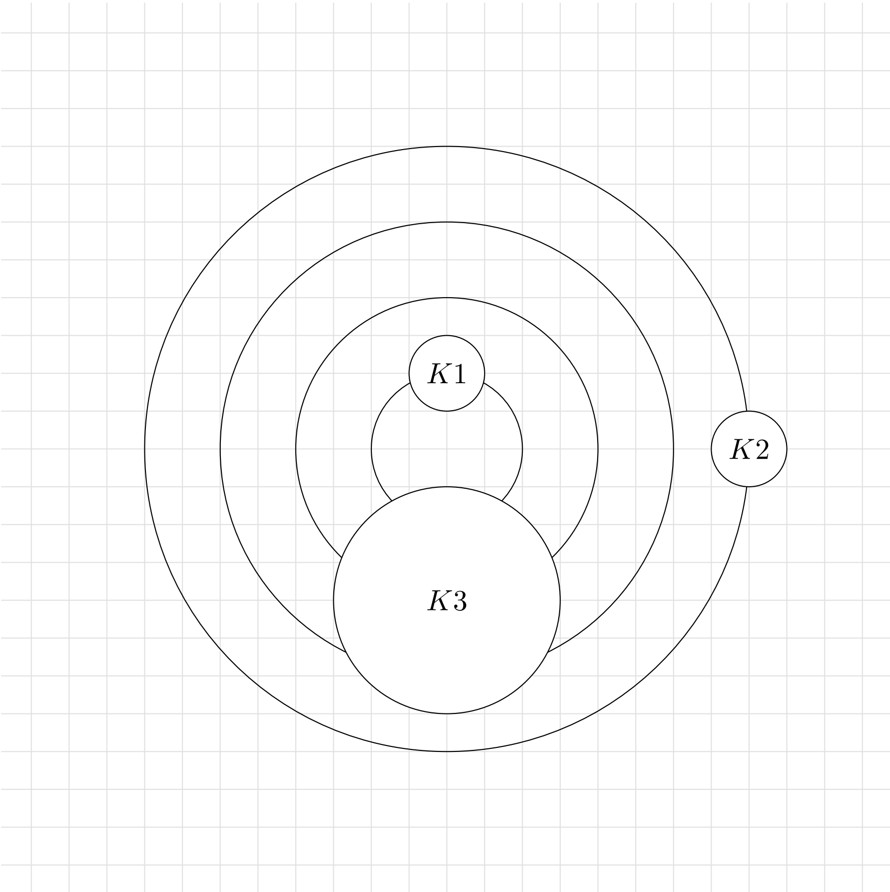
$$-(-1);\ \ 42,1;\ \ \frac{42}{14};\ \ \sqrt{100}$$

Entscheide, welche Menge zu welchem Kreis gehört.

$$A = \{3;\ \ -3;\ \ 0\}$$

$$B = \{\sqrt{-3};\ \ \pi\}$$

$$C = \{1;\ \ -1;\ \ 0,5;\ \ \sqrt{5}\}$$



1.1 Gib jeweils drei paarweise verschiedene Zahlen an, die die angegebene Eigenschaft erfüllen.

1.1.1 Element der natürlichen Zahlen.

1.1.2 Element der ganzen Zahlen.

1.1.3 Element der rationalen Zahlen.

1.1.4 Element der reellen Zahlen.

1.1.5 Element der ganzen Zahlen aber nicht der natürlichen Zahlen.

1.1.6 Element der rationalen Zahlen aber nicht der ganzen Zahlen.

1.1.7 Element der reellen Zahlen aber nicht der rationalen Zahlen.

1.1.8 Kein Element der reellen Zahlen.

1.2 Untersuche jeweils rechnerisch den Wahrheitsgehalt der Aussage.

Wer hier seinen Taschenrechner benutzt, der macht so viele Liegestütze wie es natürliche Zahlen gibt.

1.2.1

$$(3 \cdot 14 - 6 \cdot 7 + 1 \cdot 42 - 3 \cdot 14 + 2 \cdot 28) \in \mathrm{N}$$

1.2.2

$$(\sqrt{100} - \sqrt{400} - \sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{25}) \in \mathrm{Z}$$

1.2.3

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{22}{42}\right) \notin \mathrm{Q}$$

1.2.4

$$\left(\sqrt{\frac{6 + 6 \cdot 6}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{\frac{1}{42} - \frac{0}{\pi}}}}\right) \notin \mathrm{R}$$

1.3 Besondere natürliche Zahlen sind die Primzahlen. Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ ist dann und nur dann eine Primzahl, wenn gilt:

Mögliches GFS-Thema: RSA-Verschlüsselung

$$p \text{ hat genau zwei Teiler}$$

Besondere natürliche Zahlen sind die Quadratzahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ ist dann und nur dann eine Quadratzahl, wenn es eine weitere Zahl $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt:

$$a = b \cdot b$$

Untersuche damit den Wahrheitsgehalt der Aussagen.

1.3.1 Die kleinste Primzahl ist 1.

1.3.2 91 ist eine Primzahl.

1.3.3 Es gibt keine Primzahl, die größer als 400 ist.

1.3.4 Es gibt keine Möglichkeit die Zahl 42 als Produkt von ausschließlich Primzahlen zu schreiben.

1.3.5 -100 ist eine Quadratzahl.

1.3.6 125 ist eine Quadratzahl.

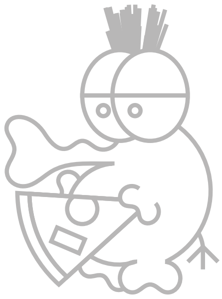
1.3.7 Es gibt keine dreistellige Quadratzahl, die durch 100 teilbar ist.

1.3.8 Es gibt keine Quadratzahl, die eine Primzahl ist.

1.3.9 Gilt $p \cdot p = a$, dann hat a keine weiteren Teiler außer p, wenn p Primzahl ist.

1.3.10 Der Quotient zweier unterschiedlicher Primzahlen ist nie natürlich.

1.4 Ein Pizzaecklefant will eine quadratische Pizza mit einem Flächeninhalt von 2 Flächeneinheiten backen.

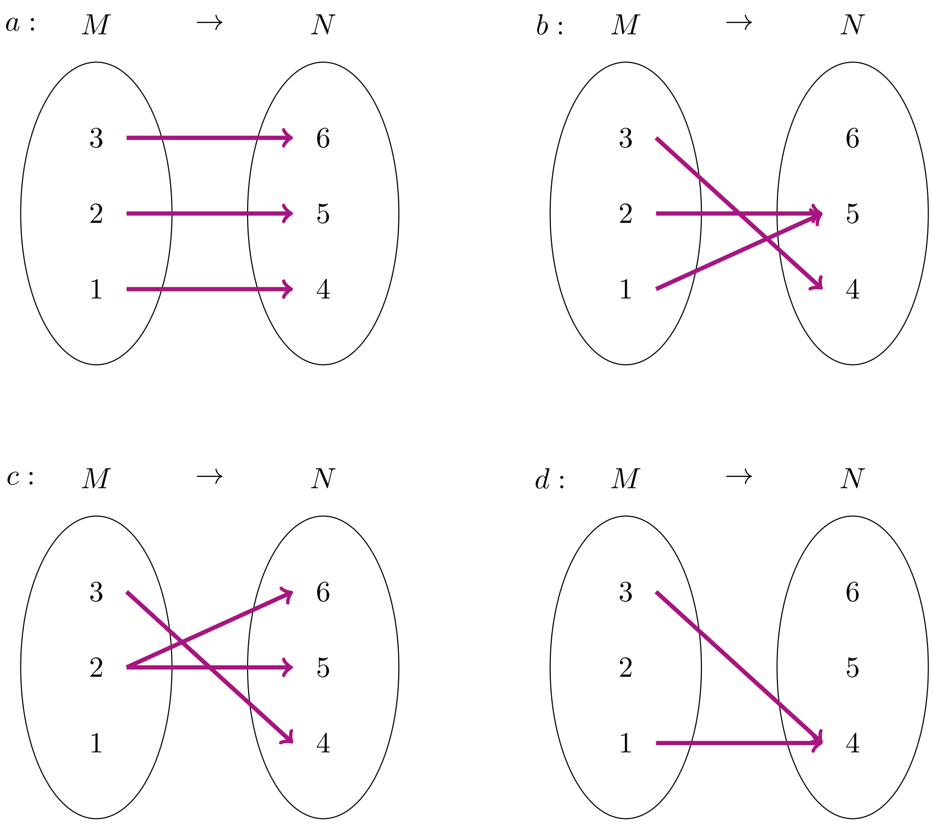


Untersuche, ob er für die Seitenlängen der Pizza eine rationale Zahl q nehmen kann. Eine rationale Zahl q ist eine Zahl, für die es zwei Zahlen $a;\ b \in Z$ gibt, sodass gilt:

$$q = \frac{a}{b}$$

Wobei a und b teilerfremd sind und es gilt: $b \neq 0$.

2 Gib jeweils an, ob es sich bei der Abbildung um eine Funktion handelt.



a : Jedem Schüler wird sein Geburtsdatum zugeordnet.

b : Jedem Lehrer werden die Fächer (die er selbst unterrichtet) zugeordnet.

c : Jedem Schüler wird sein Notendurchschnitt zugeordnet.

d : Bei einem Schachspiel werden jeder Figurart ihre Startpositionen zugeordnet.

2.1 Gib die angegebene Menge für $x \in \mathbb{R}$ jeweils in Intervallschreibweise an.

2.1.1 $3 < x < 7$

2.1.2 $-4 \leq x \leq 5$

2.1.3 $2 < x \leq 42$

2.1.4 $23 \leq x < 100$

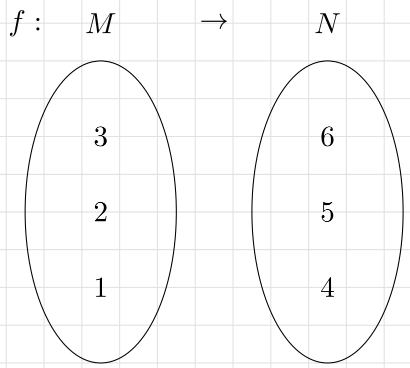
2.2 Gib jeweils den maximalen Definitionsbrereich und den zugehörigen Wertebereich der Funktion an.

$a(x) = x$, $b(x) = 2x + 3$

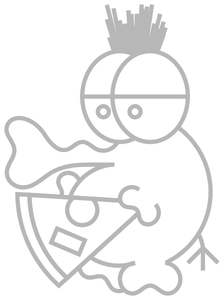
$c(x) = x^2$, $d(x) = x^2 + 5$

$e(x) = x^{-1}$, $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

2.3 Besondere Funktionen sind die bijektiven Funktionen, bei dem nicht nur jeder x-Wert höchstens einen y-Wert bekommt, sondern auch jeder y-Wert höchstens einen x-Wert bekommt. Untersuche, wie viele Möglichkeiten es gibt die Menge M bijektiv auf die Menge N abzubilden.



2.4 Der Pizzaecklefant modelliert eine Pizza.



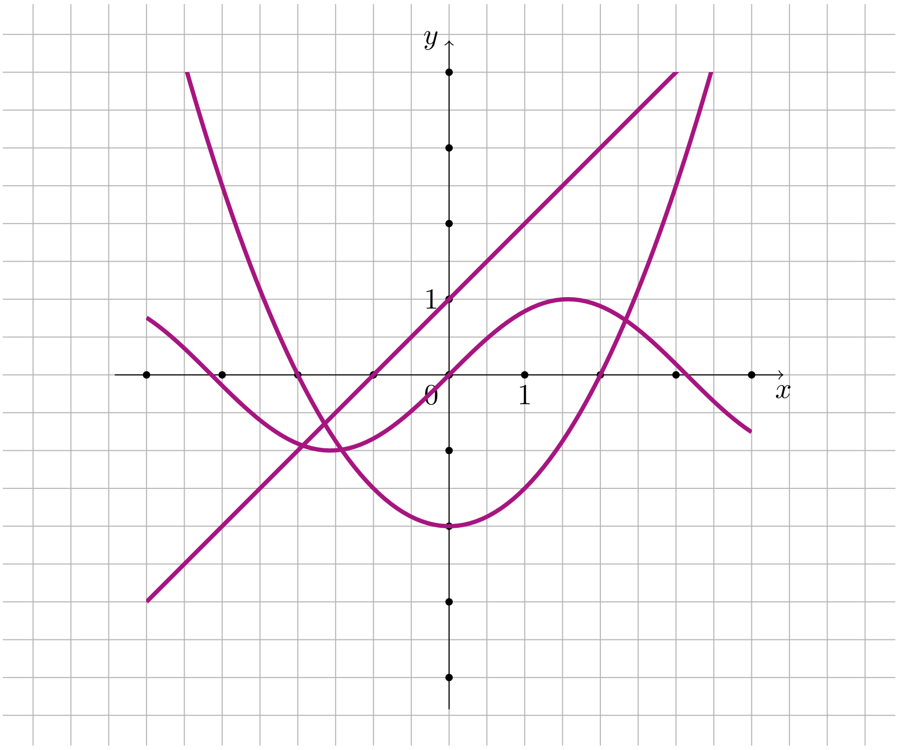
Der Rand einer Pizza wird durch den Funktionsgraphen von f modelliert durch:

$$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Skizziere das Schaubild der Funktion für $r = 3$. Untersuche, welche geometrische Form durch die Abbildung f für $r \in \mathrm{R}$ beschrieben wird. Erläutere, warum es sich bei dieser Abbildung nicht um eine Funktion handelt.

3 Gib jeweils an, welche der Darstellungsformen dieselbe Funktion beschreiben:

- Schaubilder:



- Wertetabellen:

x	0	1	2
y	1	2	3

x	0	1	2
y	-2	$-1,5$	

x	0	$0,5\cdot\pi$	π
y	0	1	0

- Funktionsgleichungen:

$$a(x) = x + 1; \qquad b(x) = 0,5 \cdot x^2 - 2; \qquad c(x) = \sin(x)$$

3.1 Skizziere jeweils das Schaubild der Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem mit $0 \leq x \leq 7$.

$$a(x) = 0,125(x-4)^2 + 1; \qquad b(x) = 2 \cdot \sin(x) + 3; \qquad c(x) = 1,2^x$$

Taschenrechner erlaubt!

3.2 Gib zur Wertetabelle jeweils eine mögliche Funktionsgleichung und zu den Schaubildern jeweils eine mögliche Wertetabelle an für $x \in \{-2;\ 0;\ 1;\ 4\}$.

Taschenrechner erlaubt!

x	1	2	3
$a(x)$	1	2	3

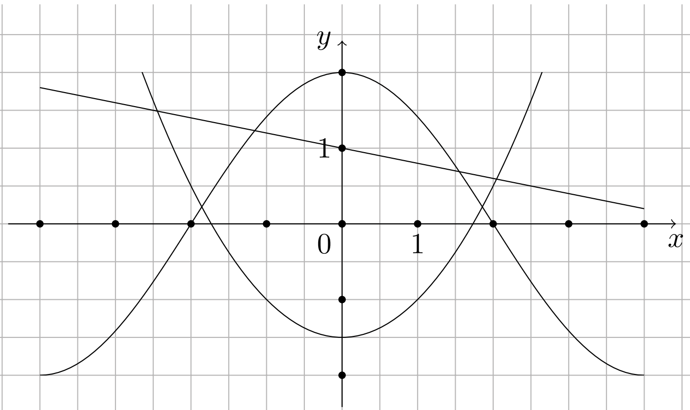
x	1	2	3
$b(x)$	3	5	7

x	1	2	3
$c(x)$	1	4	9

x	1	2	3
$d(x)$	-1	1	-1

x	1	2	3
$e(x)$	1	-4	9

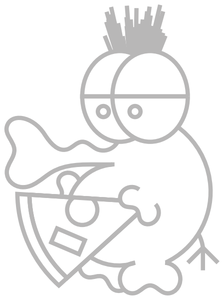
x	1	2	3
$f(x)$	-1	2	-6



3.3 Ermittle die Funktionsgleichung einer Funktion, für die beiden Aussagen gleichzeitig gelten:

- Für den Definitionsbereich $D_1 = [1;3]$ ist $P(2|2)$ der höchste Punkt des Schaubildes
- Für den Definitionsbereich $D_2 = \mathrm{R}$ ist $P(2|2)$ nicht der höchste Punkt des Schaubildes.

3.4 Der Pizzastücklefant beobachtet das Volumen seines Pizzateiges p beim Gehen (t in Minuten).



Ermittle eine passende Funktionsgleichung, wenn gilt:

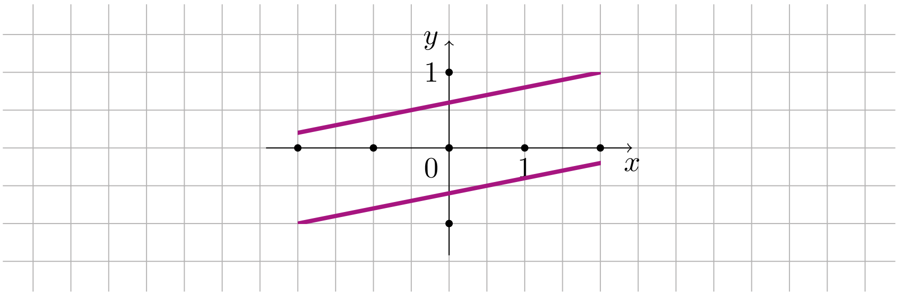
t	0	1	2
$p(t)$	1	2,1	3,8

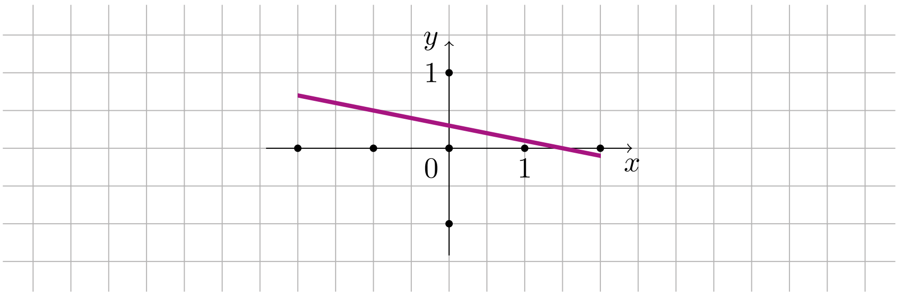
4 Gib jeweils die Lagebeziehung des Geradenpaares an und gib an, zu welchem Schaubild das Paar jeweils gehört.

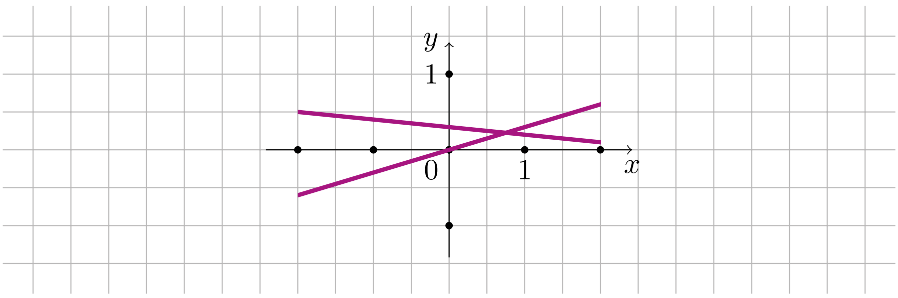
$$a_1(x) = -0,1 \cdot x + 0,3$$
$$a_2(x) = 0,3 \cdot x$$

$$b_1(x) = 0,2 \cdot x + 0,6$$
$$b_2(x) = 0,2 \cdot x - 0,6$$

$$c_1(x) = -0,2 \cdot x + 0,3$$
$$c_2(x) = -0,2 \cdot x + 0,3$$







4.1 Skizziere die zu den Funktionsgleichungen zugehörigen Geradenpaare jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem mit $-3 \leq x \leq 3$. Gib ihre Lagebeziehung an und überprüfe deine Aussage mit Hilfe der Funktionsgleichungen.

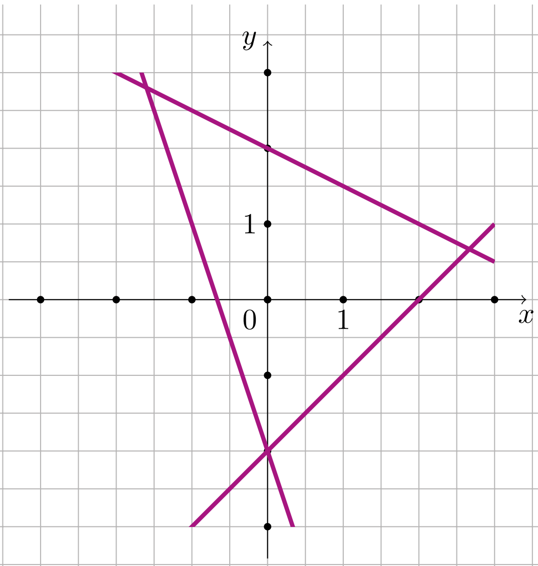
$$a_1(x) = 1 \cdot x + 1 \qquad b_1(x) = x + x$$

$$a_2(x) = 1 \cdot x + 3 \qquad b_2(x) = 2 \cdot x$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \qquad d_1(x) = -\frac{1}{3} \cdot x + 4$$

$$c_2(x) = 2 \cdot x - 1 \qquad d_2(x) = 3 - \frac{1}{3} \cdot x$$

4.2 Ermittle zu den Schaubildern jeweils den passenden Funktionsterm einer linearen Funktion. Berechne alle Schnittpunkte.

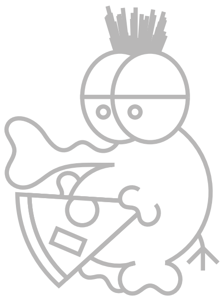


4.3 AFB Gegeben sind die linearen Funktionen a und b mit:

$$a(x) = \frac{2}{1} \cdot x - 1; \qquad b(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 3$$

Skizziere die zu den Funktionsgleichungen zugehörigen Geraden in ein geeignetes Koordinatensystem mit $0 \leq x \leq 5$. Ermittle ihren Schnittwinkel und untersuche zeichnerisch, was für die Steigungen zweier Geraden gelten muss, damit sie sich in einem rechten Winkel schneiden.

4.4 Der Pizzastücklefant isst seinen tiefgekühlten Pizzavorrat leer.



Nach drei Wochen hat er noch 585 Pizzas. Nach sieben Wochen sind es noch 525. Ermittle eine lineare Funktion, die den Pizzabestand modelliert und berechne, wann der GAU eintritt.

5 Gib die Potenzgesetzte an.

$$x^{\frac{n}{m}} \qquad x^m \cdot x^n \qquad x^{-n} \qquad \frac{x^m}{x^n} \qquad x^0 \qquad x^n \cdot y^n \qquad (x^m)^n \qquad \frac{x^n}{y^n}$$

5.1 Vereinfache so weit wie möglich.

$$2^0 + \frac{2^3}{2^4} + 2^2 \cdot 2^{-2} + \sqrt[2]{2^2} + \frac{1}{2^{-1}}$$

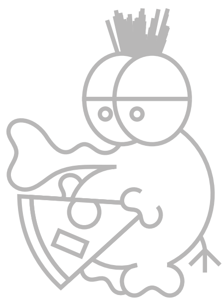
5.2 Vereinfache so weit wie möglich.

$$\frac{\sqrt{\frac{x^4+49\cdot x^2}{x}}}{\sqrt{x}}$$

5.3 Zeige mit Hilfe der Potenzgesetzte, dass für $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

5.4 Der Pizzastücklefant isst seinen tiefgekühlten Pizzavorrat leer.



Zu Beginn hat er 43008 Pizzas. Jeden Tag ist er die Hälfte davon. Berechne, wie viele Pizzas er nach 10 Tagen noch hat.

Katastrophe

1 Ermittle rechnerisch, zu welchen bekannten Zahlenmengen das Ergebnis gehört.

$$\frac{14}{2} - 3,4 + \frac{21}{\sqrt{9}} \cdot 5 + \frac{17}{5} + \frac{0}{\sqrt{\pi}}$$

2 Untersuche, bei welcher Gleichung es sich nicht um eine Funktion handelt:

$$y = 37; \qquad x = 42; \qquad y = 73 + x; \qquad x + y = 2701$$

3 Ermittle $a \in \mathrm{R}$, sodass der Funktionsgraph von f durch den Punkt $P(a|a)$ geht, wenn gilt:

$$f(x) = x^2 - x - 1680$$

4 Berechne den Schnittpunkt der Geraden g und h, wenn gilt:

$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 28$$
$$h(x) = -\frac{1}{7} \cdot x + 48$$

5 Berechne:

$$((3^{-1} \cdot 3^2 + 4)^2 + 2^5 - 3^3) \cdot 8^0$$